中國物理學報
第八卷第二期，170-175頁，1951年9月

# 關於氫二核之光致蛻變*

鄧稼先

（中國科學院近代物理研究所）

在這裏，我們扼要地說明了如何導出關於氫二核之光致蛻變的截面及角分佈的公式。在求得這些公式的過程中，我們把中子和質子看成同樣的質點，並應用忽略登變分法所求得之波函數去計算各種躍遷之矩陣素。

平常大家都覺得從氫二核之光致蛻變中可以大致瞭解一些關於核子勢之情況。在這篇文章中，我們扼要地說明氫二核之光致蛻變的截面及角分佈的公式是怎樣求來的。在求得這些公式的過程中，我們把中子和質子看成同樣質點的不同狀態，這種質點叫做核子，核子必須滿足鮑里不相容原理。我們把核子勢取作任意形狀底短力程之中心勢。

氫二核之光致蛻變可以看成一個帶有電荷 $e$ 之二核子系，由於吸收一個動量爲 $\hbar \boldsymbol{k}_\gamma$（能量爲 $E_\gamma = \hbar c k_\gamma$）之光子，從氫二核之 $^3S$ 基態 $\Psi_i$ 變到氫二核之蛻變態 $\Psi_f$。在每秒中的躍遷或然率可以由下列公式求出：

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \left| < f \mid W \mid i > \right|^2 \rho_f, \tag{1}$$

此中之 $W$ 是核子與光子之間相互作用，$\rho_f$ 是在每單位能程中蛻變態的密度。用 $P(j)$ 或 $N(j)$ 來表示第 $j$ 個核子的電荷函數按核子 $j$ 是質子或中子，用 $\alpha(j)$ 或 $\beta(j)$ 來表示其自旋函數的兩個自旋排列方向。令

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2), \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2.$$

在初態中，波函數可以寫成

*中國科學院近代物理研究所論著叢刊甲集第九號。

$$\Psi_i=\psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{R})\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[P(1)\,N(2)-P(2)\,N(1)\Big]\left\{\begin{array}{l}\alpha(1)\,\alpha(2)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha(1)\,\beta(2)+\alpha(2)\,\beta(1)\Big],\\ \beta(1)\,\beta(2)\end{array}\right. \tag{2}$$

式中
$$\psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{R})=\frac{1}{\sqrt{V}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}\;\frac{1}{(4\pi)^{1/2}}\;\frac{u(r)}{r}. \tag{3}$$

質量中心的運動用平面波函數來表示。因爲在初態時、氘二核是靜止的，所以其質量中心之動量 $\boldsymbol{p}$ 爲零。$V$ 爲平面波函數之正化體積。$u=u(r)$ 是氘二核在 $^3S$ 基態中的徑波函數、並滿足下列正化條件

$$\int_o^\infty u^2\,dr=1,$$

$u$ 同時也滿足方程式

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{M}{\hbar^2}(-\epsilon-V(r))\,u=0, \tag{4}$$

式中 $M$ 表示核子之質量、$\epsilon\,(>0)$ 表示氘二核之結合能、同時 $v(r)$ 表示適於 $^3S$ 狀態之核子勢。三重線終態的波函數可以寫成

$$\Psi_f=\frac{1}{\sqrt{V}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{R}}\frac{1}{k}\sum_{l=o}^{\infty}i^l\,(2l+1)\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[P(1)\,N(2)-(-1)^l\,P(2)\,N(1)\Big]e^{-i\delta_l}\frac{u_l(r)}{r}P_l(\cos\angle\,\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\left\{\begin{array}{l}\alpha(1)\,\alpha(2)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha(1)\,\beta(2)+\alpha(2)\,\beta(1)\Big],\\ \beta(1)\,\beta(2)\end{array}\right. \tag{5}$$

單線終態的波函數可以寫成

$$\Psi_f=\frac{1}{\sqrt{V}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{R}}\frac{1}{k}\sum_{l=o}^{\infty}i^l\,(2l+1)\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[P(1)\,N(2)+(-1)^l\,P(2)\,N(1)\Big]e^{-i\delta_l}\frac{u_l(r)}{r}P_l(\cos\angle\,\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha(1)\,\beta(2)-\alpha(2)\,\beta(1)\Big], \tag{6}$$

$u_l=u_l(r)$ 滿足

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2}+\left(k^2-\frac{M}{\hbar^2}V_l(r)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)u_l=0 \tag{7}$$

式中 $V_l$ 表示適於自旋之核子勢。 $u_l$ 並滿足下列邊界條件

$$u_l=0 \text{ 當 } r=0, \quad u_l\sim\sin\left(kr-\frac{l}{2}\pi+\delta\right) \text{ 當 } r\longrightarrow\infty. \tag{8}$$

$\boldsymbol{p}'$ 表示兩個核子在蛻變之後的總動量，其相對動量用 $\hbar\boldsymbol{k}$ 來表示、其方向是由質子指向中子。 由於不滅原理我們有

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k}_\gamma=\hbar\boldsymbol{k}_\gamma \quad \text{及} \quad E=\frac{\hbar^2 k^2}{M}=E_\gamma-\epsilon-\frac{p'^2}{4M}=E_\gamma-\epsilon-\frac{E_\gamma^2}{4Mc^2}$$

應用忽魯登[1] 的變分法可以得到很近似的波函數 $u$, $u_l$ 以及週相 $\delta$ 。 $u$ 及 $u_l$ 可以寫成

$$u=(1-e^{-\lambda r})\sum_n B_n e^{-n\lambda r}e^{-\kappa r}, \qquad \kappa=\sqrt{\frac{M\epsilon}{\hbar^2}}, \tag{9}$$

$$u_l=\cos\delta_l\left[\sum_n C_n e^{-n\lambda r}\right]F_l(r)+\sin\delta_l\left[\sum_n C_{-n}e^{-n\lambda r}\right](1-e^{-\lambda r})^{2l+1}G_l(r), \tag{10}$$

式中 $B_n$, $C_n$, $C_{-n}$ ($n=0, 1, \cdots$) 是變分參數、$1/\lambda$ 是核子勢的力程（所以 $V$ 及 $V_l$ 趨近於零當 $\lambda r>1$），

$$F_l(r)=\left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{1/2}J_{l+\frac{1}{2}}(kr)\sim\sin\left(kr-\frac{l}{2}\pi\right) \text{ 當 } r\longrightarrow\infty, \tag{11}$$

$$G_l(r)=(-1)^l\left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{1/2}J_{-l-\frac{1}{2}}(kr)\sim\cos\left(kr-\frac{l}{2}\pi\right) \text{ 當 } r\longrightarrow\infty. \tag{12}$$

應用泰勒定理，我們可以把核子與光子間之相互作用在氫二核之質量中心附近展開。當入射光子的能量不過高時，$W$ 可以寫成[2]

---

1. L. Hulthén, *Kgl. Fysiograf. Sällsk. Lund Förhandl.* **14** (1944), No. 8, No. 21. 並參看彭桓武，黃祖洽在本期內發表之論文。

2. 如果有人用介子理論的觀點去討論核子的電磁性，當光子的能量相當低時，此處所寫的 $W$ 之展開式仍然正確。 見 L. Rosenfeld, *Nuclear Forces* (Interscience Publishers, Inc., New York, 1944), Vol. II, p. 449.

$$W=-e\sum_{j=1}^{2}\frac{1+\tau_3^{(j)}}{2}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{E}_o-e\sum_{j=1}^{2}\frac{1+\tau_3^{(j)}}{2}\frac{1}{2}\left((\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{R})(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{R})\cdot\nabla_o\right)\cdot\boldsymbol{E}_o$$

$$-\sum_{j=1}^{2}\frac{e\hbar}{2Mc}\left(\frac{1+\tau_3^{(j)}}{2}\mu_p+\frac{1-\tau_3^{(j)}}{2}\mu_n\right)\boldsymbol{\sigma}_j\cdot\boldsymbol{H}_o,\qquad(13)$$

式中 $\mu_p$ 和 $\mu_n$ 是質子和中子的磁矩，它們的單位用波爾的原子核磁子 $\frac{e\hbar}{2Mc}$ 表示出來。在氫二核的質量中心上，入射光子的電場和磁場的數值是 $\boldsymbol{E}_o$ 和 $\boldsymbol{H}_o$。$\tau_3^{(j)}$ 運算在電荷函數 $P(j)$ 上得到本徵值 $+1$，運算在 $N(j)$ 上得到 $-1$。

當計算躍遷矩陣素的時候，由 $W$ 的前兩項我們得到所謂光電躍遷，由第三項我們得到所謂光磁躍遷。關於自旋變更的選擇定則對於這兩種躍遷是不同的。光電躍遷永遠把三重線基態變到三重線終態，而同時並不變更其自旋排列方向。光磁躍遷既可以把三重線基態變到三重線終態，又可將其變成單線終態，而同時又永遠變更其自旋排列方向，因此我們能分開來計算由於這兩種躍遷的截面，於是氫二核之光致蛻變的截面就是這兩種躍遷截面的總和。因為 $\Psi_i$ 是 $^3S$ 狀態，當我們計算 $\langle f\mid w\mid i\rangle$ 內角積分的時候，由於電偶極躍遷，我們僅得到 $^3P$ 終態；由於電四極躍遷，我們僅得到 $^3D$ 終態。其次我們再談磁偶極躍遷。因為當自旋不同時，核子勢是不相同的，所以 $^1S$ 終態的波函數並不正交於 $^3S$ 基態的波函數。於是我們可以知道由於磁偶極磁遷，我們僅能得 $^1S$ 終態，而不能得到 $^3S$ 終態。

我們把核子在終態中的自旋加起來，同時我們把在初態中氫二核的自旋排列方向以及入射光子的極化方向平均一下，我們就可以由 (1) 式得到氫二核之光致蛻變的微分截面

$$d\sigma=f(\theta)\,d\Omega=\frac{1}{8\pi}\Big\{2\sigma_M+\sin^2\theta\,[3\sigma_d+6(5\sigma_d\sigma_q)^{1/2}\cos(\delta_1-\delta_2)\cos\theta$$

$$+15\sigma_q\cos^2\theta]\Big\}\,d\Omega\quad\theta=\angle\,\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_r,\quad d\Omega=2\pi\sin\theta\,d\theta\qquad(14)$$

其中電偶極截面 $\sigma_d$，電四極截面 $\sigma_q$，以及磁偶極截面 $\sigma_m$ 可以由下列公式求出：

$$\sigma_d=\frac{\pi}{3}\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{M}{E}\right)^{1/2}\frac{E_\gamma}{\hbar}\mid I_1\mid^2,\qquad I_1=\int_o^\infty u_1\,r\,u\,dr;\qquad(15)$$

$$\sigma_q=\frac{\pi}{240}\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{M}{E}\right)^{1/2}\frac{E_\gamma^3}{\hbar^3c^2}\mid I_2\mid^2,\quad I_2=\int_o^\infty u_2\,r^2\,u\,dr;\qquad(16)$$

以及 $$\sigma_M = \frac{\pi}{6}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{E_\gamma}{Mc^2}\frac{\hbar}{\sqrt{ME}}(\mu_p-\mu_n)^2\,|I_0|^2,\quad I_0=\int_0^\infty u_0\,u\,dr\,; \tag{17}$$

式中 $u_1$, $u_2$ 以及 $u_0$ 是 $^3P$, $^3D$ 以及 $^1S$ 終態的徑波函數。把 (14) 式積分一下，我們得到總截面爲

$$\sigma=\sigma_M+\sigma_d+\sigma_q=\sigma_M+\sigma_E\,. \tag{18}$$

如果我們用波函數 (9) 及 (10)，由於下列公式[3]

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r}\,r^{l+\frac12}\,J_{l+\frac12}(kr)\,dr=\frac{(2k)^{l+\frac12}\,\Gamma(l+1)}{(\alpha^2+k^2)^{l+1}\sqrt{\pi}}\,;$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r}\,r^{l+\frac12}\,J_{-l-\frac12}(kr)\,dr=\frac{(k/2)^{-(l+\frac12)}}{(\alpha^2+k^2)^{l+1}\,\Gamma(-l+\frac12)}\,\alpha^{2l+1}\,F\left(-l,-l-\tfrac12,-l+\tfrac12;-\frac{k^2}{\alpha^2}\right),$$

我們可以得到積分

$$I_l=\int_0^\infty u_l\,r^l\,u\,dr\qquad(l=1,\ 2,\ 0)\,.$$

當 $l=1, 2$ 或 $0$ 時，超幾何級數變成

$$F\left(-l,-l-\tfrac12,-l+\tfrac12;-\frac{k^2}{\alpha^2}\right)=(2l+1)\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\frac{1}{2l+1-2i}\left(\frac{k^2}{\alpha^2}\right)^i\,.$$

令

$$R(n,m;l)=\frac{l!}{2}(2k)^{l+1}\left[\frac{1}{[(n\lambda+m\lambda+\kappa)^2+k^2]^{l+1}}-\frac{1}{[(n\lambda+m\lambda+\lambda+\kappa)^2+k^2]^{l+1}}\right],$$

$$S(n,m;l)=\sum_{j=0}^{2l+2}(-)^j\binom{2l+2}{j}\frac{(2l+1)!}{2^l\,l!}\,\frac{(n\lambda+m\lambda+j\lambda+\kappa)^{2l+1}}{k^l\,[(n\lambda+m\lambda+j\lambda+\kappa)^2+k^2]^{l+1}}\,T(n,m;j;l),$$

式中 $$T(n,m;j;l)=\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\frac{1}{2l+1-2i}\left(\frac{k^2}{(n\lambda+m\lambda+j\lambda+\kappa)^2}\right)^i\,.$$

最後 $I_l$ 可寫爲

$$I_l=\cos\delta_l\sum_n\sum_m C_n\,B_m\,R(n,m;l)+\sin\delta_l\sum_n\sum_m C_{-n}\,B_m\,S(n,m;l)\,.$$
$$(l=1,\ 2,\ 0) \tag{19}$$

3. 參看 G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*, 2nd Edition, pp. 385, 386.

如果我們忽略 (14) 式中的 $\sigma_q \cos^2\theta$ 項、我們就得到蛻變質子的角分佈公式如下：

$$f(\theta) \propto a + \sin^2\theta\,(1 + \alpha\cos\theta)\,,\ a = \frac{2}{3}\,\frac{\sigma_M}{\sigma_d}\,,\ \alpha = 2\,(5\,\sigma_q/\sigma_d)^{1/2}\cos(\delta_1 - \delta_2) \quad (20)$$

在實驗室系中，上公式變成

$$f(\theta_{\rm lab.}) \propto a + \sin^2\theta_{\rm lab.}\left[1 + \left(\alpha + \frac{2\beta\,E_\gamma}{E_\gamma - \epsilon}\right)\cos\theta_{\rm lab.}\right],\ \ \beta = \left(\frac{E_\gamma - \epsilon}{M\,c^2}\right)^{1/2}, \quad (21)$$

上兩式中的 $\alpha\cos\theta$ 項，或 $\alpha\cos\theta_{\rm lab.}$ 項之所以存在，是由於電偶極躍遷跟電四極躍遷互相干涉而來的。有些作者說電偶極躍遷並不能跟電四極躍遷發生干涉，因爲終態是屬于不同的電荷態，所以當我們把不同的電荷態加起來的時候，干涉項就不會產生了。但又有作者[4]說如果一種狀態有確定的角動量和自旋，那麼其電荷態就被鮑里的不相容原理所固定，於是我們不可能把電荷態加起來，因之我們仍然可以得到干涉項。在我們的計算中，我們很明顯地包括了電荷函數，我們確實得到了這干涉項。

關於中子被質子的光性俘獲，我們由 (14) 式可以得有其微分俘獲截面爲[5]

$$d\sigma_{\rm cap.} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{ME}\left(\frac{E_\gamma}{e}\right)^2 f(\theta)\,d\Omega_\gamma \quad (22)$$

此工作多蒙彭桓武先生之指導，作者在此表示謝意。

4. J. F. Marshall and E. Guth, *Phys. Rev.* **76** (1949), 1879. 並參看 J. F. Marshall and E. Guth, *Phys. Rev.* **78** (1950), 738.

5. 看參 H. A. Bethe, *Elementary Nuclear Theory* (John Wiley and Sons, Inc., New York) p. 61. J. Schwinger, 原子核物理講義，哈佛，1947 (hectographed notes on nuclear physics, Harvard, 1947).