

輻射損失對加速器中自由振動的影響*

鄧稼先 徐建銘

(中國科學院物理研究所)

提 要

在本文中討論了在高能加速器中，電子的輻射損失的量子性起伏作用對自由振動的影響。給出了計算振幅的普遍公式。在計算中考慮了輻射光子時電子受到的反衝作用，並分別就弱聚焦及簡單的強聚焦加速器進行了數字計算。計算的結果表明：在 400 億電子伏特的弱聚焦加速器中，徑向自由振動振幅達 100 厘米，遠遠大於允許值。在同樣能量的簡單強聚焦加速器中，電子的徑向振幅仍較小，僅約 1 厘米。但在磁場安排比較複雜的強聚焦加速器中，振幅可能略大，須進行實際計算。

一. 引 言

電子在軸心對稱的磁場中運動時，將由於輻射而損失能量。A. A. 索科洛夫及 И. М. 捷爾諾夫^[1] 已指出，由於輻射損失的量子性的起伏作用，將使電子的自由振動及相振動的振幅增加。當粒子加速到高能時，由於磁場的飽和作用，加速器的有效工作區域大為減小，通常減小到原始值的 $\frac{1}{2}$ 到 $\frac{1}{3}$ 。因此在高能時要求電子有較小的振動振幅。而由於入射時的偏差，氣體散射等作用所引起的自由振動及相振動的振幅在加速過程中分別按 $1/E^{1/2}$ 及 $1/E^{1/4}$ (E 是電子的能量) 的關係而衰減^[2]，因而在高能時這些作用所引起的振幅已可忽略不計。只有輻射損失的量子性起伏作用引起的振幅隨粒子能量的增加反而加大，因此對這個作用的計算是高能電子加速器的一個重要問題。

M. 桑得^[3] 及 A. A. 考洛門斯基^[4] 分別計算了在弱聚焦及強聚焦加速器中輻射損失所引起的相振動振幅的均方根值。後者指出在 100 億電子伏特強聚焦加速器中，相振動引起的半徑方向的偏移小於 1 厘米。至於輻射損失對自由振動的影響，在弱聚焦加速器中已由 A. A. 考洛門斯基^[5] 加以計算。A. H. 馬特維也夫^[6] 也求出簡單強

*1956 年 12 月 5 日收到。

聚焦加速器中自由振動振幅的均方根值的估計公式。但是他在計算中，沒有考慮到輻射光子時電子所受的反衝，因而求得的振幅較大（30 億電子伏特時，徑向自由振動振幅為 1.14 厘米），並且振幅約正比於 E ，隨能量增加較快（已考慮到磁場梯度指數 $n = -\frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r}$ 的數值正比於 E 而增大）。

在本文第二節中，將討論當考慮輻射損失的量子性起伏作用及電子所受反衝作用時，電子在半徑方向及垂直方向的自由振動的運動方程。第三、四節中將比較嚴格地計算輻射損失的量子性起伏作用所引起的自由振動振幅的均方值的普遍公式。第五節中並分別就不同能量的弱聚焦及簡單的強聚焦加速器進行數字計算，給出徑向振幅的均方根值。最後一節中進行了簡單的討論。

B. B. 弗拉基米爾斯基^[7]曾指出：當電子能量 $E < 10^{15}$ 電子伏特時，用半量子力學的方法計算所得的結果與用純量子力學方法計算所得的結果完全一致。而現在設計中的電子加速器的能量僅約 10^{10} 電子伏特，遠小於 10^{15} 電子伏特，因而以下的計算中完全用半量子力學的方法。

二. 自由振動的運動方程

本節將求出在考慮輻射的量子性起伏作用及反衝力時，電子的自由振動的運動方程。高能電子的輻射主要集中在運動軌道的切線方向，孔徑角為 $\frac{m_0 c^2}{E}$ 的很狹的圓錐中，因而可以近似地認為輻射集中在切線方向。由於輻射，電子受到反衝力 F ，其方向與運動方向相反，其大小為：

$$F = -\frac{W}{c}, \quad W = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{R^2} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^4; \quad (1)$$

式中 W 為輻射損失的功率， c 為光速， e 是電子的電荷， R 是電子軌道的半徑， m_0 是電子的靜止質量。如果電子不是正在平衡軌道上運動，則 F 可分為徑向、垂直方向及角度方向的分量，而

$$F_r = -\frac{W}{c^2} \dot{\rho}, \quad F_z = -\frac{W}{c^2} \dot{z}; \quad (2)$$

式中 $\rho = r - R$ 及 z 分別為電子軌道與平衡軌道間在半徑方向及垂直方向的偏差。因而電子在軸心對稱的磁場裏運動時，其垂直方向的自由振動運動方程是

$$\frac{d}{dt} (m \dot{z}) = \frac{eVB_r}{c} - \frac{W}{c^2} \dot{z} - \frac{1}{c} \sum_i \varepsilon_i \sin \alpha_i \delta(t - t_i). \quad (3)$$

上式中 ε_i 為所輻射的第 i 個光子的能量，而 α_i 為該光子射出方向與當時電子運動方

向間的夾角，式(3)右面最後一項代表輻射出的光子的不同方向的統計起伏作用，考慮到 $\text{rot } B = 0$ ，可將式(3)化爲：

$$\ddot{z} + \left(\frac{\dot{E}}{E} + \frac{W}{E} \right) \dot{z} - \frac{c^2}{R^2} \left(\frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) z = -\frac{c}{E} \sum_i \varepsilon_i \sin \alpha_i \delta(t - t_i). \quad (3')$$

在高能時 $W \gg \dot{E}$ ，例如 $E = 30$ 億電子伏特時 $W \cong 0.5 f$ 兆電子伏特，而 $\dot{E} \cong 0.01 f$ 兆電子伏特（式中 f 是電子旋轉的頻率），忽略 \dot{E} 項，式(3')化簡爲：

$$\ddot{z} + \frac{W}{E} \dot{z} - \frac{c^2}{R^2} \left(\frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) z = -\frac{c}{E} \sum_i \varepsilon_i \sin \alpha_i \delta(t - t_i). \quad (3'')$$

A. A. 考洛門斯基^[5] 已求出，在弱聚焦加速器中式(3'')的解是：

$$\langle z^2 \rangle_{cp} \cong \frac{RA}{n} = 3.86 \times 10^{-11} \frac{R}{n}. \quad (4)$$

在 $E = 500$ 億電子伏特時， z 方向振幅的均方根值 $\sqrt{\langle z^2 \rangle_{cp}}$ 還不到 10^{-3} 厘米，結果表明輻射出的光子的不同方向的統計起伏作用非常小，可以忽略不計。所以下面計算徑向自由振動時也忽略掉這個作用。這時徑向自由振動的運動方程是：

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\rho}) = \frac{mV^2}{R + \rho} - \frac{eB_z V}{c} - \frac{W}{c^2} \dot{\rho}. \quad (5)$$

在電子的速度接近光速時，式(5)可化簡爲：

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{E}}{E} \dot{\rho} + \frac{W}{E} \dot{\rho} + \frac{c^2}{R^2} \rho \left(1 + \frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) = \frac{\Delta E}{E} \frac{c^2}{R^2} R; \quad (6)$$

式中 $\Delta E = E - E_s$ ，爲電子能量與平衡能量 E_s 間之差。由於輻射損失的量子性起伏作用引起的 ΔE 爲：

$$\Delta E = \int_{t_0}^t \sum_i \varepsilon_i \delta(t - t_i) dt - W(t - t_0). \quad (7)$$

此處 ΔE 對時間的平均值爲零，它只代表輻射損失的統計起伏的作用。將式(7)代入(6)，並忽略掉 \dot{E} 項，可得

$$\ddot{\rho} + \frac{W}{E} \dot{\rho} + \frac{c^2}{R^2} \left(1 + \frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \rho = \frac{c^2}{R^2} \frac{R}{E} \left[\int_{t_0}^t \sum_i \varepsilon_i \delta(t - t_i) dt - W(t - t_0) \right] \quad (8)$$

或

$$\ddot{\rho} + P\dot{\rho} + Q\rho = a \left[\int_{t_0}^t \sum_i \varepsilon_i \delta(t - t_i) dt - W(t - t_0) \right]; \quad (8')$$

式中 $P = \frac{W}{E}$ ， $Q = \frac{c^2}{R^2} \left(1 + \frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right)$ ， $a = \frac{c^2}{R^2} \frac{R}{E}$ 。若磁場沿軌道作週期性的改變，

一圈中共有 N 個週期，則每個週期長 $\frac{2\pi R}{N}$ ，或者每經過 $T = \frac{2\pi R}{Nc}$ 的時間，粒子所處磁場已改變了一週期。所以 $Q = Q(t)$ ，為週期性函數，其週期為 T 。

爲求式 (8') 的特殊解，須先求它的齊次方程的解。所以在下節中將討論當 $Q(t)$ 是矩形週期性函數，在一週期內 Q 的值變化 m 次的情况下，(8') 式的齊次方程的解。

三. 徑向自由振動的齊次方程的解

爲了求式 (8') 的特殊解，先考慮其齊次方程的解，即

$$\ddot{\rho} + P\dot{\rho} + Q(t)\rho = 0. \quad (9)$$

設其解的形式是 $e^{-\frac{P}{2}t} F(t)$ ，代入方程 (9)，化簡得：

$$F''(t) + \left(Q(t) - \frac{P^2}{4} \right) F(t) = 0. \quad (10)$$

Q 的數量級約爲 10^{15} ，而 P^2 的數量級僅約 10^6 ，因而 $Q \gg \frac{P^2}{4}$ ，可將方程 (10) 化簡爲：

$$F''(t) + Q(t)F(t) = 0. \quad (10')$$

設 $Q(t)$ 是矩形週期性函數，其分佈情形如下圖所示：

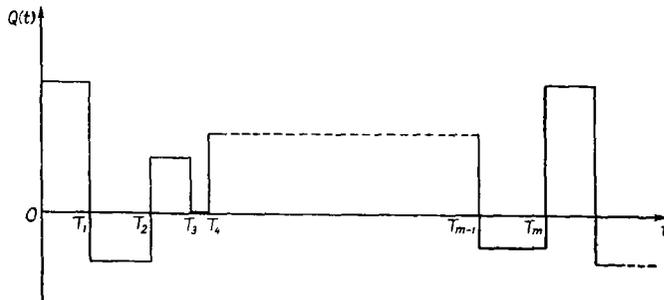


圖 1

設在 0 到 T_1 間 $Q = Q_1$ ， T_1 到 T_2 間 $Q = Q_2$ ， T_{m-1} 到 T_m 間 $Q = Q_m$ 。並設方程 (10') 在相應的時間間隔中的兩個獨立解分別爲 $f_{11}(t)$ 及 $f_{111}(t)$ ； $f_{12}(t)$ 及 $f_{112}(t)$ ，…… $f_{1m}(t)$ 及 $f_{11m}(t)$ 。並選擇

$$f_{11}(t) = f_{111}(t) = e^{\sqrt{Q_1}t}, \quad (11)$$

利用在 $t = T_i$ 時 $f_{1i-1}(t)$ 和 $f_{1i}(t)$ 及其一次微分的連續性和 $f_{11i-1}(t)$ 與 $f_{11i}(t)$ 及其一次微分在 $t = T_i$ 時的連續性，可以求出決定 $f_{1i}(t)$ 及 $f_{11i}(t)$ 的公式如下：

$$\left. \begin{aligned}
 f_{ii}(t) &= \frac{1}{2\sqrt{Q_i}} \{ [\sqrt{Q_i} f_{ii-1}(T_{i-1}) + f'_{ii-1}(T_{i-1})] e^{\sqrt{Q_i}(t-T_{i-1})} + \\
 &\quad + [\sqrt{Q_i} f_{ii-1}(T_{i-1}) - f'_{ii-1}(T_{i-1})] e^{-\sqrt{Q_i}(t-T_{i-1})} \}, \\
 f_{iii}(t) &= \frac{1}{2\sqrt{Q_i}} \{ [\sqrt{Q_i} f_{iii-1}(T_{i-1}) + f'_{iii-1}(T_{i-1})] e^{\sqrt{Q_i}(t-T_{i-1})} + \\
 &\quad + [\sqrt{Q_i} f_{iii-1}(T_{i-1}) - f'_{iii-1}(T_{i-1})] e^{-\sqrt{Q_i}(t-T_{i-1})} \}.
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

從式 (11)，可以證明

$$f_{ii}(t) = f_{ii}^*(t). \quad (13)$$

從弗婁奎特 (Floquet) 定理^[8] 知道，由於 $Q(t)$ 是時間的週期性函數，其週期為 T ，因而式 (10') 具有兩個正規解 $F_I(t)$ 及 $F_{II}(t)$ ，它們具有下列性質：

$$\left. \begin{aligned}
 F_I(t+T) &= \sigma_1 F_I(t), \\
 F_{II}(t+T) &= \sigma_2 F_{II}(t).
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

S. 倫德奎斯特^[9] 已求出， σ_1 和 σ_2 為下面的二次方程的兩個根：

$$\sigma^2 - \frac{\sigma}{\Delta} \{f_i(0)f_{ii}(T) - f'_i(0)f_{ii}(T) + f'_{ii}(0)f_i(T) - f_{ii}(0)f'_i(T)\} + 1 = 0, \quad (15)$$

式中 $\Delta = f_i f'_{ii} - f_{ii} f'_i$ 。從式 (15) 可知 $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ ，又從自由振動的穩定條件知道 $|\sigma_1| \leq 1$ ， $|\sigma_2| \leq 1$ ，因而可知 σ_1 及 σ_2 均為複數，並且：

$$\sigma_1 = \sigma_2^* = e^{i\varphi}, \quad (16)$$

而

$$\cos \varphi = \frac{1}{2\Delta} \{f_i(0)f'_{ii}(T) - f'_i(0)f_{ii}(T) + f'_{ii}(0)f_i(T) - f_{ii}(0)f'_i(T)\}, \quad (17)$$

並且

$$\left. \begin{aligned}
 F_I(t) &= [f_{ii}(T) - \sigma_1] f_i(t) - [f_i(T) - \sigma_1] f_{ii}(t), \\
 F_{II}(t) &= [f_{ii}(T) - \sigma_2] f_i(t) - [f_i(T) - \sigma_2] f_{ii}(t).
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

t 在不同的時間間隔內， $f_i(t)$ 及 $f_{ii}(t)$ 應採取相應間隔中的值，例如在 T_{i-1} 到 T_i 之間，

$$\left. \begin{aligned}
 F_{ii}(t) &= [f_{iim}(T) - \sigma_1] f_{ii}(t) - [f_{ii}(T) - \sigma_1] f_{iim}(t), \\
 F_{iii}(t) &= [f_{iim}(T) - \sigma_2] f_{ii}(t) - [f_{ii}(T) - \sigma_2] f_{iii}(t).
 \end{aligned} \right\} \quad (18')$$

將式 (13) 及 (16) 代入式 (18')，可得

$$F_{ii}(t) = -F_{iii}^*(t). \quad (19)$$

下節將利用以上的結果來計算徑向振動振幅的均方值。

四. 徑向自由振動振幅的計算

既知齊次方程 (9) 的解是 $F_I(t)$ 及 $F_{II}(t)$, 用參數變值法可求出式 (8') 的特殊解為:

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{a}{(F_I(0)F'_{II}(0) - F_{II}(0)F'_I(0))} \int_0^t e^{\frac{p}{2}(s-t)} [F_I(s)F_{II}(t) - F_{II}(s)F_I(t)] \times \\ & \times \left[\int_0^s \sum_i \varepsilon_i \delta(u - t_i) du - W(s - t_0) \right] ds = \frac{a}{(F_I(0)F'_{II}(0) - F_{II}(0)F'_I(0))} \times \\ & \times \sum_i \varepsilon_i \left\{ \int_{t_i}^t e^{\frac{p}{2}(s-t)} [F_I(s)F_{II}(t) - F_{II}(s)F_I(t)] ds - \int_0^t e^{\frac{p}{2}(s-t)} [F_I(s)F_{II}(t) - \right. \\ & \left. - F_{II}(s)F_I(t)] W(s - t_0) ds \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

利用式 (14), (16) 及 (19), 可以得到:

$$\begin{aligned} \sum_i \varepsilon_i \int_{t_i}^t e^{\frac{p}{2}(s-t)} [F_I(s)F_{II}(t) - F_{II}(s)F_I(t)] ds = & \sum_i \varepsilon_i e^{-\frac{p}{2}t} \left\{ F_{II}(t) \left[-e^{j(\frac{p}{2}T+i\varphi)} \times \right. \right. \\ & \times \int_0^{t_i-jT} e^{\frac{p}{2}s} F_I(s) ds + \frac{e^{K(\frac{p}{2}T+i\varphi)} - e^{j(\frac{p}{2}T+i\varphi)}}{e^{\frac{p}{2}T+i\varphi} - 1} \int_0^T e^{\frac{p}{2}s} F_I(s) ds + e^{K(\frac{p}{2}T+i\varphi)} \times \\ & \left. \left. \times \int_0^{t-KT} e^{\frac{p}{2}s} F_I(s) ds \right] - \text{共軛複函數} \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

式中 t_i 位於第 j 個及第 $j+1$ 個週期之間, t 位於第 K 個及第 $K+1$ 個週期之間, 將式 (21) 代入 (20) 得到:

$$\rho = \sum_i \varepsilon_i \rho(t - t_i) + \sum_i \varepsilon_i \rho_1(t) + \rho_0(t); \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} \rho(t - t_i) = & \frac{ae^{-\frac{p}{2}t}}{(F_I(0)F'_{II}(0) - F_{II}(0)F'_I(0))} \left\{ F_{II}(t) (-e^{j(\frac{p}{2}T+i\varphi)}) \left[\int_0^{t_i-jT} e^{\frac{p}{2}s} F_I(s) ds + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{e^{\frac{p}{2}T+i\varphi} - 1} \int_0^T e^{\frac{p}{2}s} F_I(s) ds \right] - \text{共軛複函數} \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \rho_1(t) = & \frac{ae^{-\frac{p}{2}t}}{(F_I(0)F'_{II}(0) - F_{II}(0)F'_I(0))} \left\{ F_{II}(t) e^{K(\frac{p}{2}T+i\varphi)} \left[\frac{1}{e^{\frac{p}{2}T+i\varphi} - 1} \int_0^T e^{\frac{p}{2}s} F_I(s) ds + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^{t-KT} e^{\frac{p}{2}s} F_I(s) ds \right] - \text{共軛複函數} \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\rho_0(t) = \frac{-u}{(F_{II}(0)F'_{II}(0) - F_{II}(0)F'_I(0))} \int_0^t e^{\frac{u}{2}(s-t)} [F_I(s)F_{II}(t) - F_{II}(s)F_I(t)] W(s-t_0) ds. \quad (25)$$

下面我們利用康貝爾 (Campbell) 定理^[10] 求振幅的均方值 $\langle \rho^2 \rangle_{cp}$:

$$\langle \rho^2 \rangle_{cp} = \overline{(\rho - \bar{\rho})^2}. \quad (26)$$

式 (26) 中是對 t_i 求平均值, 因而

$$\bar{\rho} = \overline{\sum_i \varepsilon_i \rho(t-t_i)} + \overline{\sum_i \varepsilon_i \rho_1(t)} + \overline{\rho_0(t)}.$$

由於 $\rho_1(t)$ 及 $\rho_0(t)$ 與 t_i 無關, 所以

$$\bar{\rho} = \overline{\sum_i \varepsilon_i \rho(t-t_i)} + \sum_i \varepsilon_i \rho_1(t) + \rho_0(t). \quad (27)$$

將 (27) 式代入 (26) 式, 可得到:

$$\langle \rho^2 \rangle_{cp} = \overline{(\sum_i \varepsilon_i \rho(t-t_i) - \sum_i \varepsilon_i \rho(t-t_i))^2} \quad (28)$$

從上式可知凡與光子輻射時間 t_i 無關的各項, 在求均方值時不起作用。下面我們先求能量在 ε 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 之間的光子所引起的振幅的微分均方值 $d\langle \rho^2 \rangle_{cp}$, 然後再對光子能量 ε 積分, 求所有光子引起的總振幅均方值。

$$\begin{aligned} d\langle \rho^2 \rangle_{cp} &= \overline{(\varepsilon \sum_i \rho(t-t_i) - \varepsilon \sum_i \rho(t-t_i))^2} = \\ &= \varepsilon^2 \left(\overline{\sum_i \rho^2(t-t_i)} - \sum_i \rho(t-t_i)^2 \right) \end{aligned} \quad (29)$$

設 $\nu = u(\varepsilon)d\varepsilon$, 是單位時間內放出的能量在 ε 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 之間的光子的平均個數。則在時間 t 內放出 K 個這種能量的光子的幾率 $P(K)$ 是:

$$P(K) = \frac{(\nu t)^K e^{-\nu t}}{K!}. \quad (30)$$

那麼在 t 時間內放出 K 個能量在 ε 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 的光子所引起的振幅的平均值是

$$\varepsilon \overline{\sum_{i=1}^K \rho(t-t_i)} = \varepsilon \sum_{i=1}^K \int_0^t \rho(t-t_i) \frac{dt_i}{t} = \frac{\varepsilon K}{t} \int_0^t \rho(t-t') dt', \quad (31)$$

而

$$\begin{aligned} \varepsilon \overline{\sum_i \rho(t-t_i)} &= \varepsilon \sum_{K=0}^{\infty} P(K) \frac{K}{t} \int_0^t \rho(t-t') dt' = \\ &= \varepsilon \nu \int_0^t \rho(t-t') dt'. \end{aligned} \quad (32)$$

但是

$$\varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^K \rho_K(t-t_i) \right)^2 = \varepsilon^2 \left\{ \frac{K}{t} \int_0^t \rho^2(t-t') dt' + \frac{K(K-1)}{t^2} \left[\int_0^t \rho(t-t') dt' \right]^2 \right\}, \quad (33)$$

所以

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \sum_i \rho^2(t-t_i) &= \varepsilon^2 \sum_{K=0}^{\infty} P(K) \left\{ \frac{K}{t} \int_0^t \rho^2(t-t') dt' + \frac{K(K-1)}{t^2} \left[\int_0^t \rho(t-t') dt' \right]^2 \right\} = \\ &= \varepsilon^2 \left\{ \nu \int_0^t \rho^2(t-t') dt' + \nu^2 \left[\int_0^t \rho(t-t') dt' \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

將 (32) 及 (34) 式的結果代入式 (29), 化簡得到:

$$d\langle \rho^2 \rangle_{\text{cp}} = \varepsilon^2 \nu \int_0^t \rho^2(t-t') dt' = \varepsilon^2 u(\varepsilon) d\varepsilon \int_0^t \rho^2(t-t') dt'. \quad (35)$$

將式 (23) 代入式 (35), 再利用式 (14), (16) 及 (19), 可以得到:

$$\begin{aligned} d\langle \rho^2 \rangle_{\text{cp}} &= \frac{a^2 \varepsilon^2 u(\varepsilon) d\varepsilon e^{-Pt}}{(F_{\text{I}}(0)F'_{\text{II}}(0) - F_{\text{II}}(0)F'_{\text{I}}(0))^2} \left\{ 2 \operatorname{Re} F_{\text{II}}^2(t) \left[\left(\frac{e^{K(PT+2i\varphi)} - 1}{e^{PT+2i\varphi} - 1} \right) \times \right. \right. \\ &\times \left(\int_0^T \left(\int_0^{t'} e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right)^2 dt' + \frac{T}{(e^{\frac{P}{2}T+i\varphi} - 1)^2} \left(\int_0^T e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right)^2 + \right. \\ &+ \frac{2}{(e^{\frac{P}{2}T+i\varphi} - 1)} \left(\int_0^T e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right) \left(\int_0^T \left(\int_0^{t'} e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right) dt' \right) + \\ &+ e^{K(PT+2i\varphi)} \left(\int_0^{t-KT} \left(\int_0^{t'} e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right)^2 dt' + \frac{t-KT}{(e^{\frac{P}{2}T+i\varphi} - 1)^2} \left(\int_0^T e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{(e^{\frac{P}{2}T+i\varphi} - 1)} \left(\int_0^T e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right) \int_0^{t-KT} \int_0^{t'} e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds dt' \right] - 2 |F_1(t)|^2 \times \\ &\times \left[\left(\frac{e^{KPT} - 1}{e^{PT} - 1} \right) \left(\int_0^T \left| \int_0^{t'} e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right|^2 dt' + \frac{T}{|e^{\frac{P}{2}T+i\varphi} - 1|^2} \left| \int_0^T e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right|^2 + \right. \right. \\ &+ 2 \operatorname{Re} \frac{1}{(e^{\frac{P}{2}T+i\varphi} - 1)} \int_0^T e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \int_0^T \int_0^{t'} e^{\frac{P}{2}s} F_1^*(s) ds dt' \left. \right) + \\ &+ e^{KPT} \left(\int_0^{t-KT} \left| \int_0^{t'} e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right|^2 dt' + \frac{t-KT}{|e^{\frac{P}{2}T+i\varphi} - 1|^2} \left| \int_0^T e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right|^2 + \right. \\ &\left. \left. + 2 \operatorname{Re} \frac{1}{e^{\frac{P}{2}T+i\varphi} - 1} \int_0^T e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \int_0^{t-KT} \int_0^{t'} e^{\frac{P}{2}s} F_1^*(s) ds dt' \right) \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

PT 的數量級約為 $10^{-4} \ll 1$, 所以

$$\frac{1}{e^{PT} - 1} \cong \frac{1}{PT} \gg 1. \quad (37)$$

在一般加速器中, $\pi > \varphi > \frac{\pi}{10}$, 因而

$$\frac{1}{e^{PT} - 1} \gg \frac{1}{e^{PT+2i\varphi} - 1}.$$

當 K 很大時 (通常 K 約 10^5 以上), 忽略數量級很小的項以後, 式 (36) 化簡為:

$$\begin{aligned} d\langle \rho^2 \rangle_{cp} = & \frac{a^2 \epsilon^2 u(\epsilon) d\epsilon e^{-P\epsilon}}{(F_1(0)F'_{11}(0) - F_{11}(0)F'_1(0))^2} (-2|F_1(t)|^2) \frac{e^{KPT} - 1}{e^{PT} - 1} \times \\ & \times \left[\int_0^T \left| \int_0^{t'} e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right|^2 dt' + \frac{T}{|e^{\frac{P}{2}T+i\varphi} - 1|^2} \left| \int_0^T e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \right|^2 + \right. \\ & \left. + 2 \operatorname{Re} \frac{1}{e^{\frac{P}{2}T+i\varphi} - 1} \int_0^T e^{\frac{P}{2}s} F_1(s) ds \int_0^T e^{\frac{P}{2}s'} F_1^*(s') ds' \right]. \quad (38) \end{aligned}$$

從上式可以看出, 由於 t 處於 $(K+1)T$ 及 KT 之間, 而不是處於週期的終了, 所引起的項目, 除 $|F_1(t)|^2$ 的值仍與 t 所處位置有關外, 其餘項目全部可以忽略. 因而設 $KT = t$. 又積分號內的 $e^{\frac{P}{2}s}$ 項, 其 s 值最大等於 T , 而 $PT \cong 10^{-4}$, 因而全部 $e^{\frac{P}{2}s}$ 及 $e^{\frac{P}{2}T}$ 項可以用 1 代替, 上式最後簡化成:

$$\begin{aligned} d\langle \rho^2 \rangle_{cp} = & \frac{a^2 \epsilon^2 u(\epsilon) dt}{(F_1(0)F'_{11}(0) - F_{11}(0)F'_1(0))^2} (-2|F_1(t)|^2) \left(\frac{1 - e^{-P\epsilon}}{PT} \right) \times \\ & \times \left[\int_0^T \left| \int_0^{t'} F_1(s) ds \right|^2 dt' + \frac{T}{|e^{i\varphi} - 1|^2} \left| \int_0^T F_1(s) ds \right|^2 + \right. \\ & \left. + 2 \operatorname{Re} \frac{1}{e^{i\varphi} - 1} \int_0^T F_1(s) ds \int_0^T F_1^*(s) ds \right]. \quad (39) \end{aligned}$$

利用 J. 史溫格^[11] 給出的輻射功率譜, 可知

$$u(\epsilon) = \frac{3^{5/2}}{8\pi} \frac{W}{\epsilon_c^2} \int_{\epsilon/\epsilon_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta) d\eta, \quad (40)$$

其中

$$\epsilon_c = \left(\frac{3}{2} \right) \hbar \frac{c}{R} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^3. \quad (41)$$

將式 (40) 代入 (39), 對 ϵ 積分. 由於:

$$\int_0^{\infty} \epsilon^2 u(\epsilon) d\epsilon = \frac{55}{2^3 3^{3/2}} W \epsilon_c, \quad (42)$$

於是得到各種能量的光子所引起的總振幅均方值為:

$$\langle \rho^2 \rangle_{cp} = \frac{55 W \epsilon_c}{2^3 3^{3/2}} \frac{2a^2 (-|F_1(t)|^2)}{(F_{11}(0)F'_{11}(0) - F_{11}(0)F'_1(0))^2} \left(\frac{1-e^{-Pt}}{PT} \right) \left[\int_0^T \left| \int_0^{t'} F_1(s) ds \right|^2 dt' + \right. \\ \left. + \frac{T}{|e^{i\varphi} - 1|^2} \left| \int_0^T F_1(s) ds \right|^2 + 2 \operatorname{Re} \frac{1}{e^{i\varphi} - 1} \int_0^T F_1(s) ds \int_0^T F_1^*(s) ds \right]. \quad (43)$$

當 $Q(t)$ 是矩形週期性函數，在一週期內 $Q(t)$ 值有 m 次變化時，式 (43) 可寫成：

$$\langle \rho^2 \rangle_{cp} = \frac{55}{2^3 3^{3/2}} \frac{W \epsilon_c a^2 (-2|F_1(t)|^2)}{(F_{11}(0)F'_{11}(0) - F_{11}(0)F'_1(0))^2} \left(\frac{1-e^{-Pt}}{PT} \right) \left[\sum_{i=1}^m \int_{T_{i-1}}^{T_i} |A_i|^2 dt' + \right. \\ \left. + \frac{T}{|e^{i\varphi} - 1|^2} \left| \sum_{i=1}^m b_i \right|^2 + 2 \operatorname{Re} \frac{1}{e^{i\varphi} - 1} \left(\sum_{i=1}^m b_i \right) \left(\sum_{i=1}^m \int_{T_{i-1}}^{T_i} A_i^* dt' \right) \right]; \quad (44)$$

式中

$$A_i = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_j, \\ a_i = \int_{T_{i-1}}^{T_i} F_{1i}(s) ds, \\ b_j = \int_{T_{j-1}}^{T_j} F_{1j}(s) ds; \quad (45)$$

而 F_{1i} 由式 (18) 決定。

在最簡單的強聚焦加速器中， $m = 2$ ，在 0 到 $\frac{T}{2}$ 間 $Q = Q_1$ ， $\frac{T}{2}$ 到 T 間 $Q = Q_2$ 。於是式 (44) 變為：

$$\langle \rho^2 \rangle_{cp} = \frac{55}{2^3 3^{3/2}} \frac{W \epsilon_c a^2 (-2|F_1(t)|^2)}{(F_{11}(0)E'_{11}(0) - F_{11}(0)F'_1(0))^2} \left(\frac{1-e^{-Pt}}{PT} \right) [I_1 + I_2 + I_3]; \quad (46)$$

$$I_1 = \sum_{i=1}^2 \int_{T_{i-1}}^{T_i} |A_i|^2 dt' = \int_0^{T/2} \left| \int_0^{t'} F_{11}(s) ds \right|^2 dt' + \int_{T/2}^T \left| \int_0^{T/2} F_{11}(s) ds + \right. \\ \left. + \int_{T/2}^{t'} F_{12}(s) ds \right|^2 dt', \quad (47)$$

$$I_2 = \frac{T}{|e^{i\varphi} - 1|^2} \left| \sum_{i=1}^2 b_i \right|^2 = \frac{T}{|e^{i\varphi} - 1|^2} \left| \left(\int_0^{T/2} F_{11}(s) ds + \int_{T/2}^T F_{12}(s) ds \right) \right|^2, \quad (48)$$

$$I_3 = 2 \operatorname{Re} \frac{1}{e^{i\varphi} - 1} \left(\sum_{i=1}^2 b_i \right) \left(\sum_{i=1}^2 \int_{T_{i-1}}^{T_i} A_i^* dt' \right) = 2 \operatorname{Re} \frac{1}{e^{i\varphi} - 1} \left(\int_0^{T/2} F_{11}(s) ds + \right. \\ \left. + \int_{T/2}^T F_{12}(s) ds \right) \left(\int_0^{T/2} \int_0^{t'} F_{11}^*(s) ds dt' + \int_{T/2}^T \left(\int_0^{T/2} F_{11}^*(s) ds + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{T/2}^{t'} F_{12}^*(s) ds \right) dt' \right). \quad (49)$$

下面將利用振幅均方值的普遍公式 (44) 來計算弱聚焦, 及簡單的強聚焦加速器中振幅的均方值。

五. 實例計算

在弱聚焦加速器中 $Q = \frac{c^2}{R^2} (1 - n_\mu)$, 而 $n_\mu = -\frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r}$, $m=1$, $T = \frac{2\pi R}{c}$. 利用式 (18') 求得

$$\left. \begin{aligned} F_{I1}(t) &= -(2i \sin Q^{1/2} T) e^{iQ^{1/2}t}, \\ F_{II}(t) &= -(2i \sin Q^{1/2} T) e^{-iQ^{1/2}t}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

代入式 (44), 化簡以後得到:

$$\langle \rho^2 \rangle_{CP} = \frac{55\sqrt{3}}{96} \frac{RA}{(1-n_\mu)^2} \gamma^2 (1-e^{-\rho t}), \quad (51)$$

式中 $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$, $\Lambda = \frac{\hbar}{m_0 c}$, 和 A. A. 考洛門斯基的結果^[5] 一樣。

在簡單強聚焦加速器中, 為了計算簡便, 設在 0 到 $\frac{T}{2}$ 間 $Q=Q_1 = \frac{-c^2}{R^2} n_{\text{BK}}$, 而在 $\frac{T}{2}$ 到 T 之間 $Q=Q_2 = \frac{c^2}{R^2} n_{\text{BK}}$. 並且 $N=2\sqrt{n_{\text{BK}}}$, 於是 $T = \frac{\pi R}{c\sqrt{n_{\text{BK}}}}$. 代入公式 (17) 得到:

$$\cos \varphi = \cos \frac{c}{R} \sqrt{n_{\text{BK}}} \frac{T}{2} \cosh \frac{c}{R} \sqrt{n_{\text{BK}}} \frac{T}{2} = \cos \frac{\pi}{2} \cosh \frac{\pi}{2} = 0, \quad (52)$$

因而 $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 並由式 (18') 可知

$$\left. \begin{aligned} F_{I1}(t) &= -2i \left[\cos \frac{c}{R} \sqrt{n_{\text{BK}}} t \cosh \frac{\pi}{2} + \sin \frac{c}{R} \sqrt{n_{\text{BK}}} t \sinh \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{c}{R} \sqrt{n_{\text{BK}}} t \right], \\ F_{I2}(t) &= -2i \left[\sinh \frac{c}{R} \sqrt{n_{\text{BK}}} (T-t) + i \cosh \frac{c}{R} \sqrt{n_{\text{BK}}} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

因而

$$(F_{I1}(0) F'_{II}(0) - F_{II}(0) F'_{I1}(0))^2 = -64 \frac{c^2}{R^2} n_{\text{BK}} \cosh^2 \frac{\pi}{2}, \quad (54)$$

並且當 $t = KT + \frac{T}{4}$ 時, $|F_{I1}(t)|^2$ 為最大值, 而

$$|F_{I1}(t)|^2_{\max} = |F_{II}(t)|^2_{t=KT+\frac{T}{4}} = 4 \cosh \frac{\pi}{2} \left(\cosh \frac{\pi}{2} + \sinh \frac{\pi}{2} \right). \quad (55)$$

將式 (53) 代入式 (47), (48) 及 (49) 得到

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{4}{c^2 n_{\text{жк}}} \left[\left(\frac{7}{2} T - \frac{4}{R \sqrt{n_{\text{жк}}}} \right) \cosh^2 \frac{\pi}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(T - \frac{1}{\frac{c}{R \sqrt{n_{\text{жк}}}}} \right) \sinh \pi + \frac{2}{\frac{c}{R \sqrt{n_{\text{жк}}}}} \cosh \frac{\pi}{2} \right], \\
 I_2 &= \frac{4}{c^2 n_{\text{жк}}} \left[3T \cosh^2 \frac{\pi}{2} + T \sinh \pi - 2T \cosh \frac{\pi}{2} \right], \\
 I_3 &= \frac{-4}{c^2 n_{\text{жк}}} \left[2T \cosh^2 \frac{\pi}{2} + T \sinh \pi - \frac{1}{\frac{c}{R \sqrt{n_{\text{жк}}}}} \sinh \pi - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{6}{\frac{c}{R \sqrt{n_{\text{жк}}}}} \cosh \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\frac{c}{R \sqrt{n_{\text{жк}}}}} \cosh^2 \frac{\pi}{2} \right].
 \end{aligned} \tag{56}$$

將式 (54), (55) 及 (56) 代入式 (46), 可求得振幅的均方值為:

$$\begin{aligned}
 \langle \rho^2 \rangle_{\text{CP}} &= \frac{55\sqrt{3}}{96} \frac{R\Lambda}{n_{\text{жк}}^2} \gamma^2 (1-e^{-Pt}) \left(\frac{\cosh \frac{\pi}{2} + \sinh \frac{\pi}{2}}{\pi \cosh \frac{\pi}{2}} \right) \left[\left(\frac{9}{2} \pi - 8 \right) \cosh^2 \frac{\pi}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + \pi \sinh \pi + (8-2\pi) \cosh \frac{\pi}{2} \right] = \frac{55\sqrt{3}}{96} \times 48.3 \frac{R\Lambda}{n_{\text{жк}}^2} \gamma^2 (1-e^{-Pt}).
 \end{aligned} \tag{57}$$

所以從式 (51) 及 (57) 可知:

$$\frac{\Delta r_{\text{жк}}}{\Delta r_{\mu}} = \frac{(1-n_{\text{жк}})}{n_{\mu}} \sqrt{48.3} = \frac{1-n_{\text{жк}}}{n_{\mu}} \times 6.95. \tag{58}$$

式中 $\Delta r_{\text{жк}}$ 及 Δr_{μ} 分別為在強聚焦及弱聚焦加速器中, 由輻射損失引起的徑向自由振動的振幅的最大均方根值。通常 $PT \cong 10^{-4}$, 而 $t = KT \cong 10^5 T$ 。所以在加速終了時, $Pt \geq 10$, 因而可忽略式 (51) 及 (57) 中 e^{-Pt} 一項, 所以:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta r_{\mu} &= \left(\frac{55\sqrt{3}}{96} \frac{R\Lambda}{(1-n_{\mu})^2} \gamma^2 \right)^{1/2}, \\
 \Delta r_{\text{жк}} &= \left(\frac{55\sqrt{3}}{96} \times 48.3 \frac{R\Lambda}{n_{\text{жк}}^2} \gamma^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \right\} \tag{59}$$

利用和 A. H. 馬季也夫^[6] 同樣的數據, 即 $n_{\mu} = 0.6$, $n_{\text{жк}} = 25$, 則從式 (58) 得到:

$$\frac{\Delta r_{\text{жк}}}{\Delta r_{\mu}} = 1.1 \times 10^{-1}. \quad (60)$$

當 $E = 30$ 億電子伏特, $R = 10$ 米時, 從式 (59) 計算得到

$$\Delta r_{\mu} = 3.0 \text{ 厘米}, \quad \Delta r_{\text{жк}} = 0.33 \text{ 厘米}; \quad (61)$$

約為 A. H. 馬季也夫不考慮反衝阻尼的結果 ($\Delta r_{\text{жк}} = 1.14$ 厘米) 的 $\frac{1}{4}$.

下表列舉在不同能量下 $\Delta r_{\text{жк}}$ 及 Δr_{μ} 的數據. 在計算中假定: 最高磁場強度為 10000 奧斯特, 強聚焦加速器的磁場安排是: $N = 2\sqrt{n_{\text{жк}}}$, 在 0 到 $\frac{T}{2}$ 間, $Q_1 = -\frac{c^2}{R^2} n_{\text{жк}}$, 在 $\frac{T}{2}$ 到 T 間, $Q_2 = \frac{c^2}{R^2} n_{\text{жк}}$. 在弱聚焦加速器中 $n_{\mu} = 0.6$.

E (10億電子伏特)	R (米)	$n_{\text{жк}}$	$\Delta r_{\text{жк}}$ (厘米)	Δr_{μ} (厘米)
1	3.3	16	0.095	0.55
3	10	50	0.160	2.877
5	16	80	0.210	6.04
10	33	160	0.303	17.4
20	66	320	0.428	49.2
40	132	320	1.209	139.2
40	132	640	0.605	139.2
80	264	320	3.41	393.6
80	264	640	1.71	393.6
100	330	320	4.78	550.2
100	330	640	2.39	550.2

六. 討 論

從公式 (59) 看出, 考慮到反衝阻尼後, 在弱聚焦加速器中 $\Delta r_{\mu} \propto \frac{E^{3/2}}{(1-n_{\mu})}$; 在強聚焦加速器中 $\Delta r_{\text{жк}} \propto \frac{E^{3/2}}{n_{\text{жк}}}$, 而 $n_{\text{жк}}$ 約正比於半徑 R , 所以也正比於 E , 於是 $\Delta r_{\text{жк}} \propto E^{1/2}$. 振幅隨能量增加的速度比弱聚焦要慢.

若不考慮反衝阻尼, 正如 A. H. 馬季也夫^[6]求出的結果, Δr_{μ} 約正比於 $\left(\frac{E^2}{1-n_{\mu}}\right)$, $\Delta r_{\text{жк}}$ 約正比於 E . 振幅隨能量增加的速度比本文的結果要快一些.

上面計算中還忽略了由於粒子能量隨時間增加所引起的振幅的衰減作用. 即使這樣, 計算結果已表明在 400 億電子伏特的強聚焦電子加速器中, 輻射損失所引起的自

由振動的振幅的均方根值也不過 1 厘米左右,是可以允許的,不致於引起大量電子的損失。但在弱聚焦加速器中引起的振幅很大,使加速器無法正常工作。

必須指出,在實際的強聚焦加速器中,磁鐵的排列不像前面所討論的那樣簡單。常常在 $|n_{\mu}| \gg 1$ 的磁鐵節中間安置有 $n = 0$ 的區域。如果在該區域中磁場強度也等於零,由於粒子在那裏走直線,輻射損失極小,只是由於沒有磁場,整個加速器的聚焦力略有減弱,對自由振動振幅影響較小。但是如果那裏磁場並不等於零,則除聚焦力略減弱外,在那些區域中電子仍輻射光子,而在該處輻射損失的量子性起伏作用對自由振動的影響,和在弱聚焦加速器裏相似(只是 $n_{\mu} = 0$)。如果這磁鐵節比較長,則在它們裏面引起的振幅已較大,將損失大量電子或甚至加速器不能正常工作。因此這種磁鐵節應盡可能減少並縮短。同時對不同加速器設計須利用公式(44)進行具體計算。並根據粒子的振幅分佈譜估計粒子損失的比例。

參 考 文 獻

- [1] Соколов, А. А. и Тернов, И. М., ДАН 92 (1953), 537; ЖЭТФ 25 (1953), 698; ДАН 97 (1954), 823; ЖЭТФ 28 (1955), 431.
- [2] Kerst, D. W. and Serber, R., Phys. Rev. 60 (1941), 53; Bohm, D. and Foldy, L., Phys. Rev. 70 (1946), 249.
- [3] Sands, M., Phys. Rev. 97 (1955), 470.
- [4] Коломенский, А. А., ЖЭТФ 30 (1956), 207.
- [5] Коломенский, А. А. и Лебедев, А. Н., ДАН 106 (1956), 807.
- [6] Матвеев, А. Н., ДАН 107 (1956), 671.
- [7] Владимирский, В. В., ЖЭТФ 18 (1948), 392.
- [8] Whitlaker, E. T. and Watson, G. E., A Course of modern analysis (MacMillan Company, New York, 1946), p. 412.
- [9] Lundquist, S., Phys. Rev. 91 (1953), 980.
- [10] Rice, S. O., The Bell. Tech. Journal, 23 (1944), 282.
- [11] Schwinger, J., Phys. Rev. 75 (1949), 1912.

О ВЛИЯНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ НА БЕТАТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В УСКОРИТЕЛЯХ

ДЭН ЦЗЯ-СЯНЬ СЮИ ЦЗЯНЬ-МИН

(Физический институт Академии Наук Китая)

РЕЗЮМЕ

В данной статье конкретно обсужданы влияния на бетатронные колебания квантовых флуктуаций излучения электронов, движущихся в ускорителе с высокой энергией.

Дается общая формула для расчета амплитуды колебаний. При расчете рассмотрена действующая на электроны сила отдачи, когда излучается фотон. Затем отдельно проведены численные расчеты по ускорителю с мягкой фокусировкой и простому ускорителю с сильной фокусировкой, результаты показывают, что в ускорителе на 40 бэВ с сильной фокусировкой амплитуда радиального бетатронного колебания более незначительна, около 1 см. Но в ускорителе с мягкой фокусировкой амплитуда радиального бетатронного колебания до несколько десятков сантиметров и много раз больше, чем разрешаемая величина.