

輕 原 子 核 的 變 形^{*†}

于 敏 鄧稼先 周孝謙^{**} 李揚國

(中 國 科 學 院)

提 要

近來分析輕原子核的能譜發現有些原子核似有轉動能級。本文根據綜合模型的理論對一些輕原子核的基態、激發態和變形之間的關係加以研究。在討論中考慮了對能及轉動微擾的影響，結果發現轉動微擾對於形變的影響頗大，在某些情形例如： O^{17} ， O^{18} 能將長形變成球形，並且改變能級的組態的次序。

一、引 言

近年來有人^[1]分析氧以上的輕原子核的能級，發現有些原子核如 F^{19} ， Mg^{24} ， Mg^{25} ， Al^{26} 等似乎有轉動能級。這說明這些原子核的形狀可能不是球形的，而是有相當大的變形。尼爾森 (Nilsson) 在 1955 年曾計算過單粒子在橢球的平均場中運動的能級曲綫^[2]。本文就是利用了尼爾森的能級曲綫來討論 O^{17} — Si^{29} 這些輕原子核的內稟組態和變形的關係，發現即使是 O^{17} ， O^{18} 這兩個原子核也稍有變形，而在 F^{19} 以上的原子核的變形就更大。這些原子核不但基態有變形，而且激發態的變形還可能和基態的變形不同。事實上 O^{17} ， O^{18} 等的基態的變形是不大的，這可能是由於剩餘力和轉動微擾的影響使它們恢復球形。所以本文中還討論了由於剩餘力所產生的對能和轉動微擾對於能級的影響，結果發現對能並不是顯著地隨着滿殼層外核子數目增加而增大，事實上，當次級殼層被填滿時，對能對核形變就沒有什麼影響，而轉動能和轉動微擾的影響反而較大。例如 O^{17} 就是由於轉動微擾的影響，結果使形變大大減小。

本文只是初步地討論原子核變形的規律，以後還將進行定量地計算和討論。在第二節將定性地討論原子核變形的規律；在第三、第四節中分別討論對能和轉動能的影響；在附錄中給出 O^{17} 的轉動微擾的具體計算。

二、變形的規律

現在我們考慮原子核的內稟組態和形變的關係。原子核的內稟能量就是把單粒子在變形場中運動的能量加起來。由於我們祇考慮激發能量小於 10 Mev 的激發態，所以當我們把單粒子能量加起來時，就祇考慮激發能量小於 10 Mev 的那些激發態。我們利用尼爾森的單粒子能級曲綫(尼爾森論文中圖 5 的曲綫)計算了 O^{17} ， O^{18} ， F^{19} ， Ne^{20} ， Ne^{21} ，

* 1958 年 8 月 5 日收到。

† 在全國大躍進中向中國共產黨的卅七周年生日獻禮。

** 江蘇師範學院。

表 1. O^{17} - Si^{29} 等原子核的內稟組態

表中 4, 6, 等代表和尼爾森第 4 條曲綫, 第 6 條曲綫相應的粒子態, 號碼 6^2+14 代表以 16 個粒子組成的核心加上三個 6 號粒子(即上述尼爾森第 6 條曲綫相應的粒子)和一個 14 號粒子的組態. $-4+6^3$ 代表上述核心但缺少一個 4 號粒子, 外加三個 6 號粒子的組態.

| 原子核 | 基 態 | | | 激 發 態 | | 原子核 | 基 態 | | | 激 發 態 | |
|-----------|---------------------------|--------------------------------|----|--|---|-----------|---------------------------------|-----------------|----|--|--|
| | 計算值 | 實驗值 | 形變 | 組 態 | 形變 | | 計 算 值 | 實 驗 值 | 形變 | 組 態 | 形變 |
| O^{17} | $(6) \frac{1}{2}^+$ | $\frac{1}{2}^+$ | 長 | (5) (-4+6 ²) (14) (-4 ² +6 ³) (-4 ³ +6 ⁴) | 扁 長 長 長 長 | Mg^{26} | $(6^4+7^4+9) \frac{1}{2}^+$ | $\frac{1}{2}^+$ | 長 | $(6^4+7^3+9^2)$ (6^4+7^4+14) $(6^4+7^2+9^3)$ (6^4+7^4+5) (6^4+7+9^4) (5^4+6^4+7) $(6^2+7^4+9^2)$ $(6^4+7^3+14^2)$ $(6^4+7^2+9+14^2)$ $(6^2+7^4+14^2)$ $(6^4+7^2+14^3)$ | 長 長 長 長 扁 長 長 長 長 長 |
| O^{18} | $(6^2) 0^+$ | 0^+ | 長 | (5 ²) (-4+6 ³) (6+14) (-4 ² +6 ⁴) | 扁 長 長 長 | | $(6^4+7^4+9^2) 0^+$ | 0^+ | 長 | (6^4+7^4+9+5) $(6^4+7^3+9^3)$ $(6^4+7^2+9^4)$ (6^4+7^4+14+9) $(5^4+6^4+7^2)$ $(6^4+7^4+14^2)$ $(6^4+7^3+9+14^2)$ $(6^4+7^3+14^3)$ | 長 長 長 長 扁 長 長 長 |
| F^{19} | $(6^3) \frac{1}{2}^+$ | $\frac{1}{2}^+$ | 長 | (-4+6 ⁴) (5 ³) (6^2+7) (6 ² +14) (-4+5 ⁴) | 長 扁 長 長 扁 | Mg^{28} | $(6^4+7^4+9^3) \frac{1}{2}^+$ | $\frac{1}{2}^+$ | 長 | $(6^4+7^3+9^4)$ $(6^4+7^4+9^2+14)$ $(6^4+7^4+5^3)$ $(6^4+5^4+7^3)$ $(6^4+7^4+9^2+5)$ $(6^4+7^4+9+14^2)$ $(6^4+7^3+9^2+14^2)$ $(6^4+7^4+14^3)$ $(6^2+7^4+9^4)$ | 長 長 長 長 扁 長 長 長 |
| Ne^{20} | $(6^4) 0^+$ | 0^+ | 長 | (6^3+9) (6^3+7) (5 ⁴) (6^3+14) | 長 長 扁 長 | | $(6^4+7^4+9^3) \frac{1}{2}^+$ | $\frac{1}{2}^+$ | 長 | $(6^4+7^3+9^4)$ $(6^4+7^4+9^2+14)$ $(6^4+7^4+5^3)$ $(6^4+5^4+7^3)$ $(6^4+7^4+9^2+5)$ $(6^4+7^4+9+14^2)$ $(6^4+7^3+9^2+14^2)$ $(6^4+7^4+14^3)$ $(6^2+7^4+9^4)$ | 長 長 扁 長 長 長 長 長 |
| Ne^{21} | $(6^4+7) \frac{3}{2}^+$ | $\frac{3}{2}^+, \frac{5}{2}^+$ | 長 | (6^4+9) (6^3+7^2) (6^4+14) (5 ⁴ +6) (6^3+9^2) | 長 長 長 扁 長 | Al^{27} | $(6^4+7^4+9^3) \frac{1}{2}^+$ | $\frac{1}{2}^+$ | 長 | $(6^4+7^3+9^4)$ $(6^4+7^4+9^2+14)$ $(6^4+7^4+5^3)$ $(6^4+5^4+7^3)$ $(6^4+7^4+9^2+5)$ $(6^4+7^4+9+14^2)$ $(6^4+7^3+9^2+14^2)$ $(6^4+7^4+14^3)$ $(6^2+7^4+9^4)$ | 長 長 扁 長 長 長 長 長 |
| Na^{22} | $(6^4+7^2) 3^+$ | 3^+ | 長 | (6^4+7+9) (6^4+9^2) (6^4+7+14) (6^4+9+14) (5 ⁴ +6 ²) (6^3+7^2+14) | 長 長 長 長 扁 長 | | $(6^4+7^4+5^4) 0^+$ | 0^+ | 扁 | $(6^4+7^4+9^4)$ $(6^4+7^4+9^2+14)$ $(6^4+9^4+7^3+14)$ $(6^4+7^3+9^2+14^2)$ $(6^4+7^2+9^4+14^2)$ $(6^4+7^4+9+14^3)$ $(6^4+7^4+14^4)$ | 長 長 長 長 扁 長 長 長 |
| Na^{23} | $(6^4+7^3) \frac{3}{2}^+$ | $\frac{3}{2}^+$ | 長 | (6^4+9^2+7) (6^4+7^2+9) (6^3+7^4) (6^4+9^3) $(6^4+7+9+14)$ (6^4+7^2+14) (5 ⁴ +6 ³) (6^4+9^2+14) (6^4+7^4-4) (6^4+7+14^2) (6^4+9+14^2) | 長 長 長 長 長 長 扁 長 長 長 長 | Si^{28} | $(6^4+7^4+5^4+8) \frac{3}{2}^+$ | $\frac{3}{2}^+$ | 扁 | $(6^4+7^4+9^4+5)$ $(6^4+7^3+9^2+14)$ $(6^4+7^4+5^4+9)$ $(5^4+6^4+7^3+8^2)$ $(6^4+7^4+9^2+14^2)$ $(6^4+7^4+14^4+9)$ $(6^4+7^4+14^4+5)$ $(6^4+9^4+14^4+7)$ | 長 長 扁 長 長 長 長 |
| Mg^{24} | $(6^4+7^4) 0^+$ | 0^+ | 長 | (6^4+7^3+9) $(6^4+7^2+9^2)$ (6^4+7+9^3) (6^4+5^4) (6^4+7^3+14) (6^4+7^2+9+14) (6^4+9^4) | 長 長 長 扁 長 長 長 | | | | | | |

Na^{22} , Na^{23} , Mg^{24} , Mg^{25} , Mg^{26} , Al^{27} , Si^{28} , Si^{29} 的內稟組態和形變的關係(見圖 1—13)。在每一條內稟組態曲線中找出其中最低點, 對應於這一點的形變 δ 即作為這一組態的平衡形變 δ_0 。在表 1 中列出這些原子核的內稟組態。從圖 1—13 以及表 1 中可以看出 O^{17} 和 O^{18} 的基態的變形還不太大, 而 F^{19} 以上的原子核的基態的變形就逐漸增大逐漸變長,

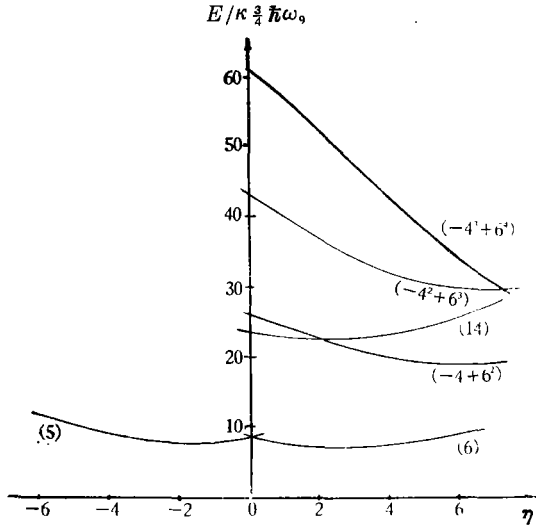


圖 1. O^{17} 的內稟能量和原子核形變的關係

縱坐標是以 $\kappa \frac{3}{4} \hbar \omega_0$ 為單位 ($\kappa=0.05$, $\hbar \omega_0 \approx 41 A^{-\frac{1}{3}} \text{Mev}$)。曲線上所附的號碼就是尼爾森文章圖 5 中的曲線的號碼。例如 $-4+6^2$ 這條曲線就代表把尼爾森曲線從下面起一直加到(6)這條曲線; 而(6)這條曲線加了兩次, 但其中少加了一次(4)這條曲線。

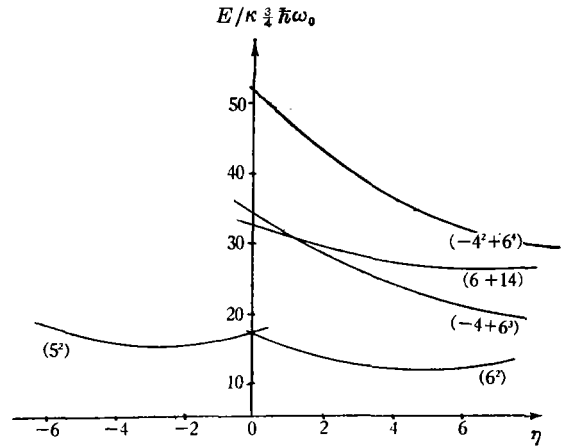


圖 2. O^{18} 的內稟能量和原子核形變的關係

(說明見圖 1)

Si^{28} 的基態有可能是扁的。 Si^{29} 的基態是扁的, 它們的低激發組態也有扁的。這樣的變形規律可以用尼爾森的能級曲線的性質來解釋。

當變形比較大時, 自旋-軌道耦合力這一項以及和軌道角動量 l^2 成比例的一項可以忽略不計, 因而粒子是在橢球諧振子場中運動, 所以它的狀態可以用量子數 N , n_z , Λ , Σ 來表示。其中 N 是主量子數, n_z 是沿着原子核變形對稱軸的量子數, Λ 是軌道角動量平

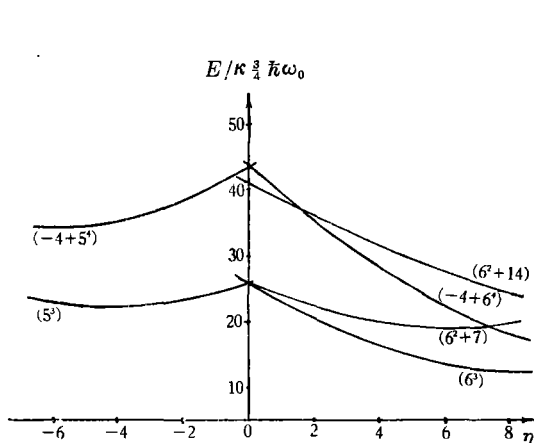


圖 3. F^{19} 的內稟能量和原子核形變的關係(說明見圖 1)

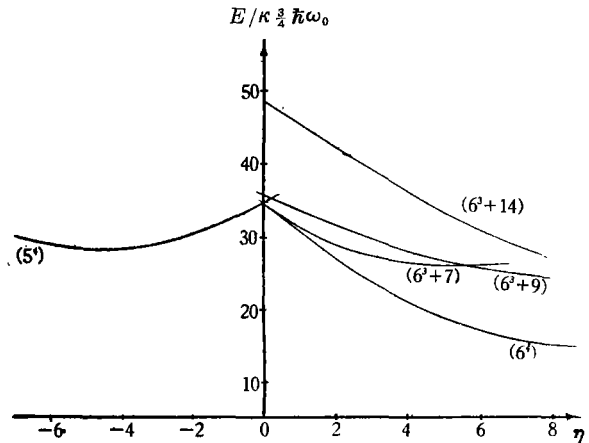


圖 4. Ne^{20} 內稟能量和原子核形變的關係(說明見圖 1)

行於對稱軸的分量, Σ 是自旋軌道的分量 ($\Sigma = \pm \frac{1}{2}$). 因而粒子的能量等於^[2]

$$E_{N, n_z} = \hbar\omega_0 \left[(N - n_z + 1) \left(1 + \frac{2}{3}\delta \right)^{\frac{1}{2}} + \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{4}{3}\delta \right)^{\frac{1}{2}} \right] \approx \approx \hbar\omega_0 \left(\frac{N}{3} - n_z \right) \delta, \quad (\text{不考慮常數項}) \quad (1)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \omega_x^2 &= \omega_y^2 = \omega_0^2(\delta) \left(1 + \frac{2}{3}\delta \right), \\ \omega_z^2 &= \omega_0^2(\delta) \left(1 - \frac{4}{3}\delta \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

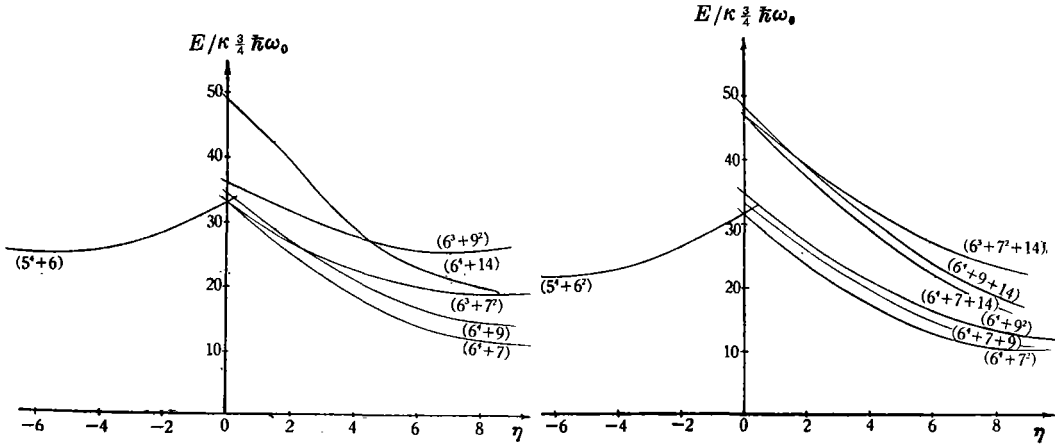


圖 5. Ne^{21} 內稟能量和原子核形變的關係(說明見圖 1) 圖 6. Na^{22} 內稟能量和原子核形變的關係(說明見圖 1)

此處 δ 是形變參數。 $A = 0$ 或 $\pm 1, \dots, \pm(N - n_z - 1), \pm(N - n_z)$; A 是奇數還是偶數要看 $(N - n_z)$ 是奇還是偶。由(1)式看出:當 $\delta > 0$, 即原子核是長橢球形時, 對固定的

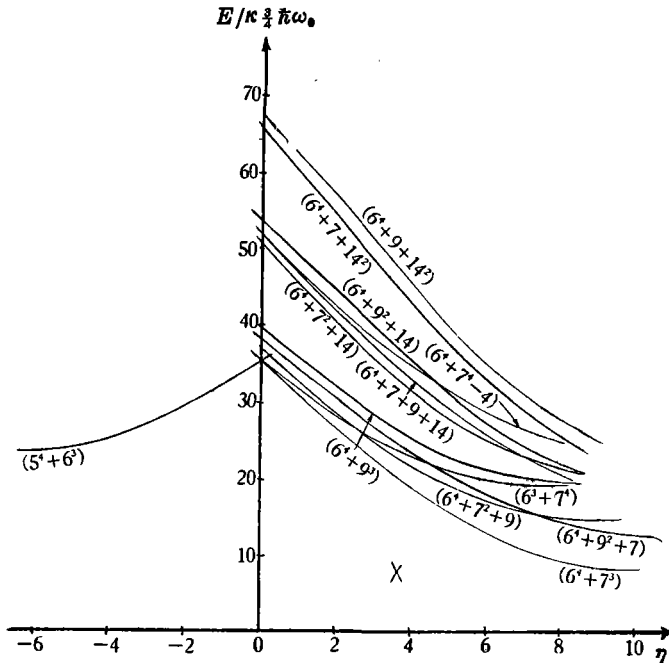


圖 7. Na^{23} 內稟能量和原子核形變的關係(說明見圖 1)

N 來講, $(n_z + \frac{1}{2}) (1 - \frac{4}{3}\delta)^{\frac{1}{2}}$ 是隨着 δ 值的增加而減小的, 而 $(N - n_z + 1) (1 + \frac{2}{3}\delta)^{\frac{1}{2}}$ 則是隨着 δ 值的增加而增加。因此, 從尼爾森的能級曲線來看, 當 $\delta > 0$ 時, 相當於 $N - 3n_z < 0$ 的曲線一定是下降的; 換句話說, 這條曲線在原子核內稟組態中所起的作用一定是要使原子核變成長的, 特別是 $n_z = N$ 的曲線下降最陡。而相當於 $N - 3n_z > 0$ 的曲線一定是上升的, 也就是要使原子核變扁, 特別是 $n_z = 0$ 的曲線上升最陡。在 $N \lesssim 3n_z$ 左右的曲線可能是平的。例如

$$\begin{aligned}
 N = 2: & \quad (6) \ d_{\frac{5}{2}}^{\frac{1}{2}+} \longrightarrow N - n_z = 0, \quad n_z = 2, \quad A = 0; \\
 & \quad (7) \ d_{\frac{5}{2}}^{\frac{3}{2}+} \left. \begin{array}{l} \\ (9) \ s_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+} \end{array} \right\} \longrightarrow N - n_z = 1, \quad n_z = 1, \quad A = 1; \\
 & \quad (11) \ d_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}+} \longrightarrow N - n_z = 2, \quad n_z = 0, \quad A = 0; \\
 & \quad (5) \ d_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}+} \left. \begin{array}{l} \\ (8) \ d_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}+} \end{array} \right\} \longrightarrow N - n_z = 2, \quad n_z = 0, \quad A = 2; \\
 N = 3: & \quad (14) \ f_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}-} \longrightarrow N - n_z = 0, \quad n_z = 3, \quad A = 0.
 \end{aligned}$$

在上例中，(6)，(7)，…等就是尼爾森曲線的號碼。由上面的推論可知，(6)和(14)這兩條曲線下降得很快，而(5)這條曲線上升得很快，(8)和(11)這兩條曲線也是上升得較快，(7)和(9)則較平。而尼爾森曲線也確實具有這種性質。此外，由上述推理還可看出，接近滿殼層時曲線上升較快，而剛一超過滿殼層時，曲線就立即下降得很快，像(6)和(14)就是剛過 8 和 20 這兩個滿殼層的曲線。由此可知，原子核在滿殼層時

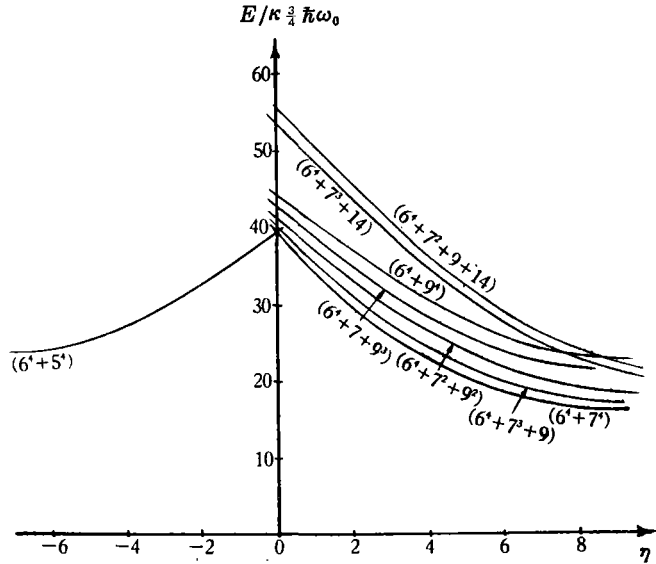


圖 8. Mg²⁴ 內稟能量和原子核形變的關係(說明見圖 1)

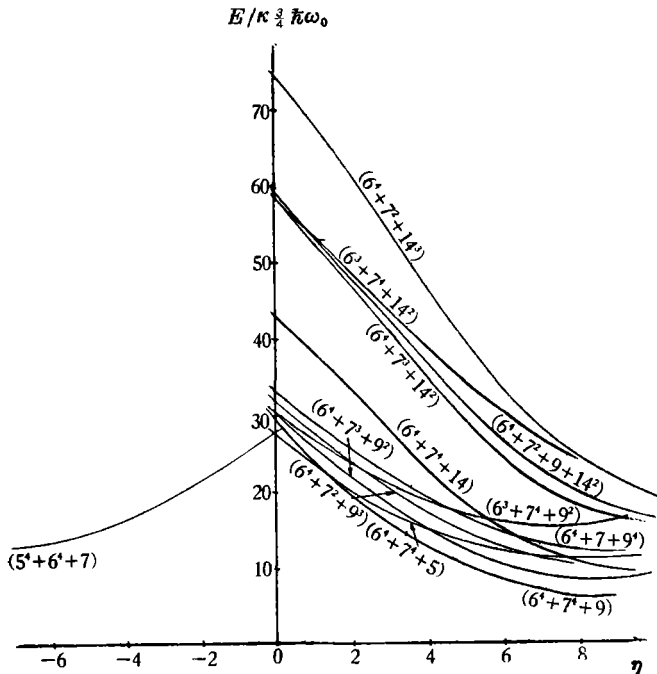


圖 9. Mg²⁶ 的內稟能量和原子核形變的關係(說明見圖 1)

硬度很大，不容易變形。因此 O¹⁶ 的基態是球形的，O¹⁷ 是在滿殼層外再加一個組態為(6)的核子。(6)這條曲線雖然下降得很快，但是單獨一個組態為(6)的核子還不足以抵抗原子核在滿殼層時的硬度；因此 O¹⁷ 僅稍有變形。而 O¹⁸ 是在滿殼層外填兩個組態為(6)的核子，因此變形就大一些，到 F¹⁹ 是在滿殼層外填三個組態為(6)的核子，因此變形就很大。F¹⁹ 有一個低激發組態是從核心激發一個組態為(4)的核子到(6)這組態上，結果(6)就填滿了四個核子。這樣一來，一方面核心的硬度減小，另一

方面四個組態為(6)的核子要使原子核變長，所以 F^{19} 這一低激發組態比基態的變形還要大，還要長一些。 F^{19} 的基態和低激發組態的變形既然很大，因此就可能產生轉動能帶，最近有人^[1]分析結果也說明這可能是事實。 Ne^{20} 是滿殼層外填四個組態為(6)的核子，所以變形很大，原子核這時變得很長，因此 Ne^{20} 很可能有轉動能帶，實驗結果是 Ne^{20} 的第一個激發能級的自旋和宇稱是 2^+ ，能量是 1.63 Mev，如果認為是轉動能級，則 $\frac{\hbar^2}{2I} \sim 0.54$ Mev

正和 F^{19} 所分析的轉動慣量相近^[8]。這結果說明 Ne^{20} 也可能有轉動能帶，但再高的激發能級的自旋和宇稱，實驗的結果還沒有定出來，因此還需要進一步做實驗來驗證是否有轉動能帶。 Ne^{21} 是滿殼

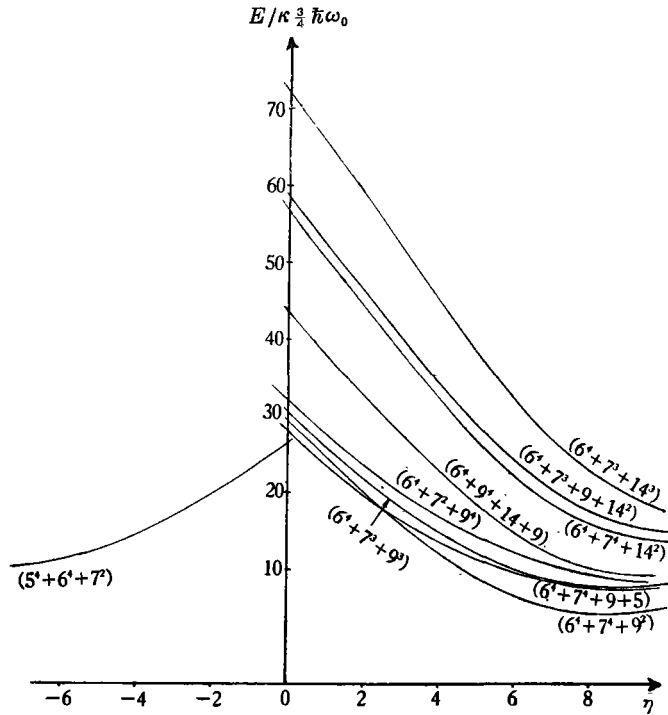


圖 10. Mg^{28} 的內裏能量和原子核形變的關係(說明見圖 1)

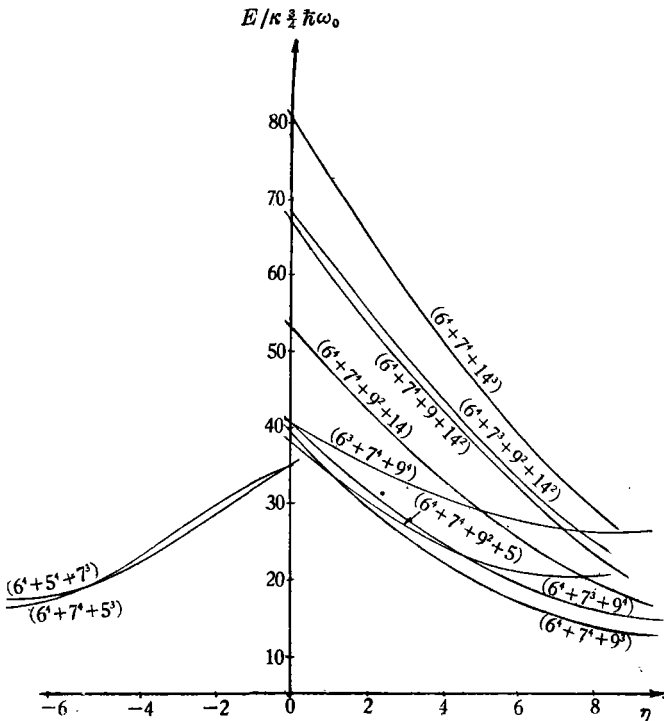


圖 11. Al^{27} 的內裏能量和原子核形變的關係(說明見圖 1)

層外填四個組態為(6)的核子和一個組態為(7)的核子，因(7)這條曲綫比較平，所以自 Ne^{21} 以後的基態的變形差不多保持穩定。因為(5)這條曲綫上升很快，它的作用是要使原子核變扁，所以當有四個粒子填滿這個組態時，原子核就可能變扁，因此原子核的激發態如果是填充這一組態的話，那麼它的變形就可能和基態不同，甚至有可能基態是長的，而激發態是扁的。到了 Si^{28} ，基態的組態是 $5^4 + 6^4 + 7^4$ ，有四個核子填滿(5)這組態，因而它的基態是扁的。 Si^{29} 也是有四個核子填充(5)這一組態，

所以它的基態也是扁的。Si²⁸ 的電四極矩應當是負的，這一點和實驗是符合的。一般原子核是扁的可能性較少，實驗結果也是如此，原子核的電四極矩絕大多數都是大於零的，很少有小於零的。這一點很容易解釋，因為根據前面的考慮[見(1)式]很容易看出，使原子核變長的組態是比較多的，而使原子核變扁的組態則比較少。這是由於長的方向是一度的，而扁的方向是兩度的，對於同樣的 $|\delta|$ ，無論符號是正還是負，滿殼層核子反抗變形的能力是同樣的，但是促使變形的核子所獲得的能量則相差 2 倍之多，因此原子核容易拉長而不易壓扁。

利用尼爾森曲綫的這些性質，也可以解釋為什麼原子核由 $N = 88$ 到 $N = 90$ 突然有一個變形^[4]。因為當 $N = 88$ 和 $N = 90$ 時， Z 差不多是 62 左右，而 $Z = 62$ 的原子核是填滿 (33) 這一組態，(33) 這條綫是平的，對於原子核的變形影響不大；而

當 $N = 82-88$ 時是分別填充 (47), (53), (46) 和 (60) 這四個組態的，這四條綫都是要使原子核變長，只不過原子核在 82 這一殼層硬度較大。這四個組態合起來的作用還不能使原子核變形，不過它們使原子核變形的作用已經積累起來，使原子核的硬度已經大大減小。事實上， 2^+ 能級的位置和庫倫激發的約化矩陣元等也表現出 $N = 88$ 的原子核的硬度比較小，因此再填兩個中子到 (57) 這組態上，而這組態又要使原子核變長，所以由量變引起質變，結果 $N = 90$ 時就有一個突然的變形。此外還可以解釋：當 $Z = 76$, $N = 116$ 時，原子核又開始回到球形， $N = 114$ 的原子核是填滿 (71), (62) 這些組態。(71), (62) 這兩條曲綫是平的，對原子核的變形影響也不大，這時原子核已處於球形和橢球形交界的地方，再增加中子要開始填 (48)，而 (48) 上升很陡，因此就要將原子核拉回成球形。 $Z = 72-76$ 時質子是填 (25), (31) 和 (32) 三個組態，而這三條曲綫上升得很快。每一條都要使原子核變成球形，所以三個組態累積起的效應，也會使原子核開始回到球形。由此可見，使原子核變形的因素是很多核子的組態積累起來的效果，到將要發生變形的地方，原子核的硬度已大大減小，再加一兩個核子，如果這些核子的組態合適，就可以引起原子核形狀發生顯著的變化。(在 $N = 88-90$ 的地方，質子組態不起顯著作用是一個很偶然的情形，因為這時質子正在填充平的組態。) 因此在這個區域即使核子數目不改變，只要核子的

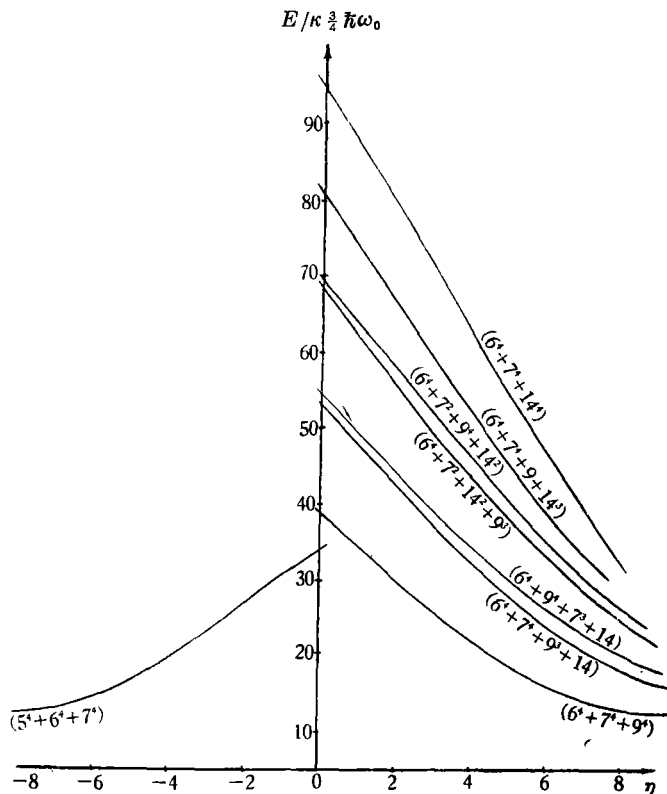


圖 12. Si²⁸ 的內稟能量和原子核形變的關係(說明見圖 1)

內稜組態改變,也可能使原子核變形,所以我們應當可以觀察到這樣的現象,在同一個原子核中,不同的能級表現出不同的形狀,當然這時它們之間的 γ 躍遷幾率將大為減小。

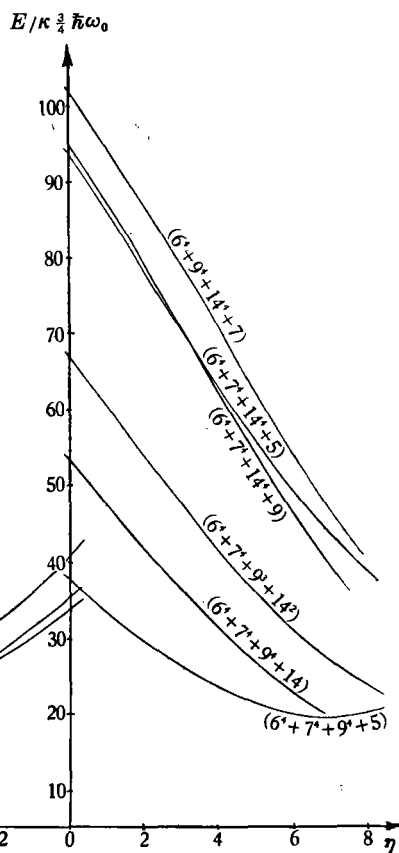


圖 13. Si^{28} 內稜能量和原子核形變的關係(說明見圖 1)

原子核能級和形變的影響。在討論這種影響之前,先討論一下將尼爾森的單粒子能量從最低的組態加到某一組態作為原子核在這組態的能量的理論基礎。已知質量是 A 的原子核哈密頓算符等於

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}, \quad (3)$$

式中 T_i 是動能, V_{ij} 是相互作用能。令原子核的波函數是 $\prod_i \Psi_i(\delta, \alpha)$, Ψ_i 是第 i 個粒子的波函數,其中 δ 是形變參數, α 是形變參數以外其餘的參數,例如包括密度參數等¹⁾,按照哈特里-福克(Hartree-Fock)方法,求這個原子核的能量,應當用變分法求 $I = \langle H \rangle$ 的極值。已知

$$I = \left\langle \prod_i \Psi_i(\delta, \alpha) \left| \sum_{i=1}^A T_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \right| \prod_i \Psi_i(\delta, \alpha) \right\rangle, \quad (4)$$

1) 這裏假設 δ, α 等是參數,實際上這是不符合海森堡測不準原理的,在正確的理論中,應當把 δ, α 等看做某種集體運動的坐標,雖然把它們的“振動”考慮進來當然是非常困難的工作。在這裏我們暫不討論這個問題,只把它們當做參數。這樣所推出來的結果,當然會忽略原子核的振動和轉動能。

總之,利用尼爾森的曲綫可以定性地解釋原子核變形的規律。從表 1 可知,用尼爾森曲綫計算所得到的原子核基態的自旋和宇稱與實驗值大致符合,但 O^{17} , Mg^{25} , Al^{27} , Si^{28} 這四個原子核的基態的自旋理論值和實驗值不符,並且 O^{17} 和 O^{18} 也有些變形,這與事實也不符合,因此我們進一步考慮由於剩餘力所產生的對能的影響和轉動微擾的影響。在下兩節中我們就討論這兩種因素的影響。

三、對 能

在尼爾森論文中僅考慮核子獨立地在變形的原子核中運動,而完全忽略了剩餘力的作用。我們現在討論由於剩餘力所產生的對能對於

求極值時，則得

$$\frac{\partial I(\delta, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad (5)$$

及

$$\frac{\partial I(\delta, \alpha)}{\partial \delta} = 0. \quad (6)$$

(5)式代表在一定變形 δ 下原子核的最低能量，它應當代表在該 δ 值下的原子核的平均自洽場。從物理上考慮起來，它應當包括不可壓縮(即密度不變)等條件。如果認為尼爾森所取的勢阱就是平均自洽場，那末(5)式就代表尼爾森曲綫加上對能的結果。因而(6)式就代表在密度等不變的條件下、形變等於某一 δ_0 時，原子核的能量達到極值，換句話說， δ_0 就是原子核的形變，而這個極值就是真正的能量(當然不算轉動能，看上一附註)；換言之，我們把尼爾森的單粒子能量從最低的組態加到某一組態，再加上對能時就是原子核在這組態的能量，在這裏應當討論一下關於平均場的問題。為了說明方便起見，我們以 O^{18} 為例，首先討論 $\delta = 0$ 即球形時的情況。顯然在這種情況下，我們不能認為平均場是由全部 17 個核子產生的，因為最外面的那個核子不是球形對稱的，由它所產生的場應當是和它的方向有關係的。因此最自然的辦法是把平均場看作是由 O^{16} 實所產生的¹⁾。這樣 O^{18} 的能量就等於 O^{17} 的單粒子能量加上外面兩個核子間的對能，這就是通常的耦合理論。在形變 δ 不等於零的情況下，問題變得更加不明確了。不過假設我們所取平均勢深度和在沒有形變時一樣，只是形狀改變，那末很自然地我們應當認為在形變的情況下，平均場是由在球形下同樣數目的核子產生的，即同樣是由變形後的 O^{16} 實產生的²⁾。選定了平均場，我們就可以估計對能的效應了。例如 O^{17} 的(6)組態能量就是圖 1 中所畫的那條曲綫，如果滿殼層內有一個核子激發到滿殼層外的組態上來，例如 $-(4) + (6)^2$ 這一組態，那麼由於尼爾森沒有考慮剩餘力，圖 1 中的 $-(4) + (6)^2$ 這組態的能量僅等於組態為(6)的這兩個核子和殼層內的核子相互作用，加上殼層內核子的相互作用，而沒有考慮殼層外這兩個核子彼此之間的相互作用，以及這兩個核子和空穴的相互作用，而這些相互作用就是由於剩餘力所產生的對能。因此 O^{17} 在 $-(4) + (6)^2$ 這一組態的能量應該等於

$$E_{-(4)+(6)^2} + \Delta E_{(6)-(6)} - 2\Delta E_{(6)-(4)}.$$

式中 $E_{-(4)+(6)^2}$ 就等於將尼爾森的單粒子能量從最低的組態加到(6)²組態，其中(4)組態少加一次， $\Delta E_{(6)-(6)}$ 就是代表組態為(6)的兩個核子之間的對能， $\Delta E_{(6)-(4)}$ 就代表組態為(6)的這個核子和空穴(4)的對能。同樣 O^{17} 如果有兩個核子激發上來，則滿殼層外有三個核子，用 P_1, P_2 和 P_3 代表它們，滿殼層有兩個空穴，用 h_1 和 h_2 代表。假設這時 O^{17} 的組態是 $-(4)^2 + (6)^3$ ，則這時 O^{17} 的能量應該等於

$$E_{-(4)^2+(6)^3} + \Delta E_{P_1 P_2} + \Delta E_{P_1 P_3} + \Delta E_{P_2 P_3} + \Delta E_{h_1 h_2} - \Delta E_{P_1 h_1} - \Delta E_{P_1 h_2} - \Delta E_{P_2 h_1} - \Delta E_{P_2 h_2} - \Delta E_{P_3 h_1} - \Delta E_{P_3 h_2}.$$

但是當原子核的滿殼層外有很多核子時，這種計算方法就不很正確了，因為我們這種計算

- 1) 嚴格地說，這樣做不是平均自洽場。但由於滿殼層核實的穩定性在滿殼層外核子數不太多的情況下，這可能是一種很好的近似。
- 2) 嚴格地說，在尼爾森所採用的近似(N 是好量子數)下，很容易看出 O^{16} 實是不變形的，因此由它產生的平均場不是尼爾森所採用的平均場。關於這個問題將來再做討論。

方法是把平均場看成是由滿殼層內的核子供給的。如果滿殼層外有很多核子，就很難說平均場僅由滿殼層內的核子供給的。所以對於在滿殼層外核子較多的原子核對能如何計算還需仔細考慮。因此在具體計算中，我們僅計算了對能對於 O^{18} 和 F^{19} 這兩個原子核的變形的影響。

在具體計算中，我們假設剩餘力是 $\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ 類型的作用力，亦即

$$V_{ij} = -\frac{\mathcal{J}}{4\pi} \delta(\cos \theta_i - \cos \theta_j) \delta(\varphi_i - \varphi_j) \frac{1}{r^2} \delta(r_1 - r_2), \quad (7)$$

式中 \mathcal{J} 代表相互作用強度。我們利用 O^{18} 和 O^{17} 的結合能之差來決定 \mathcal{J} 。這兩個原子核結合能之差等於 4 Mev，結果是

$$\mathcal{J} = \frac{16\pi}{3} \times (0.146\alpha^3)^{-1} \text{Mev-厘米}^2, \quad (8)$$

式中 $\alpha^2 = \frac{M\omega_0}{\hbar_0} = \frac{M}{\hbar^2} \hbar\omega_0 \cong 41A^{-\frac{1}{3}} \frac{M}{\hbar^2}$ (M 是核子的質量)。在計算過程中，在形變等於零的情況下，我們將遇見以下三種情形：

(1) 要求出兩個相同粒子以及兩個不同粒子間的相互作用。如果它們的角動量分別是 j_1 和 j_2 ，軌道角動量分別是 l_1 和 l_2 而且耦合成 J ，相同粒子間的相互作用等於

$$F_1^J = 2(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(C_{j_0^{l_1 l_2}}^{j_1 \frac{1}{2} l_1})^2 U^2 \begin{pmatrix} j_1 \frac{1}{2} l_1 \\ j_2 \frac{1}{2} l_2 \\ J \ 0 \ J \end{pmatrix} \times \frac{\mathcal{J}}{4\pi} \int R_{n_1 l_1}^2(r) R_{n_2 l_2}^2(r) r^2 dr. \quad (9)$$

兩個不同粒子的相互作用就等於

$$F_2^J = \frac{1}{2} F_1^J + 3(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \times \sum_L (C_{j_0^{l_1 l_2}}^{j_1 \frac{1}{2} l_1}) U^2 \begin{pmatrix} j_1 \frac{1}{2} l_1 \\ j_2 \frac{1}{2} l_2 \\ J \ 1 \ L \end{pmatrix} \frac{g}{4\pi} \int R_{n_1 l_1}(r) R_{n_2 l_2}(r) r^2 dr. \quad (10)$$

這裏的 $C_{j_0^{l_1 l_2}}^{j_1 \frac{1}{2} l_1}$ 是克來別希-哥登係數， U 是廣義拉卡 (Racah) 係數。在這兩式中， F_1 是 1S 波相互作用， F_2 是 1S 波和 3S 波相互作用。

(2) 有兩個相同的粒子在組態 j 上，另有一個粒子在組態 j_0 上。如果兩個在組態 j 上的相同粒子的總角動量耦合成零，則組態是 j_0 的粒子和這兩個粒子之間的相互作用等於

$$\bar{F} = 2 \frac{\sum (2J + 1) F^J}{(2j_0 + 1)(2j + 1)}. \quad (11)$$

(3) 有 n 個相同粒子在組態 j 上，當 n 是偶數時，它們的總角動量是零，當 n 是奇數時，它們的總角動量是 j 。另有一個粒子的組態是 j_0 ，則它們彼此間的相互作用是：

$$F = \begin{cases} \frac{n}{2} \bar{F} & n = \text{偶數}, \\ \left(\frac{n - \frac{2j + 1 - 2n}{2j - 1}}{2} \right) \bar{F} - \frac{2j + 1 - m}{2j - 1} F^I & n = \text{奇數}. \end{cases} \quad (12)$$

式中 I 代表 j_0 和 j 耦合成的角動量。應用這些結果就不難對具體的問題進行對能計算。

現在再討論形變不等於零的情形。在此情形，嚴格地說，應該用尼爾森所給出的與各個形變相應的波函數，但是如果近似地用形變等於零時的波函數來替代他算出的結果也很相近，而不致影響我們所作的結論。例如以在尼爾森曲綫(6)上的兩個粒子的相互作用能的計算為例。我們將嚴格的計算結果和近似的結果列在下面的表中：

| | | |
|--|--------------------|------------|
| | $\eta = 4$ | $\eta = 6$ |
| | 用尼爾森波函數 | $0.37F^0$ |
| | 用 $\eta = 0$ 時的波函數 | $0.44F^0$ |

在下面的計算中，我們用形變等於零時的波函數來代替尼爾森波函數。

● 表示質子，○ 表示中子。

- (甲) $\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---} j_1 \Omega_1$
 或 $\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}$ $2 \sum_J (C_{j_1 a, j_1 -a}^{J 0})^2 F^J$,
 a 與 b 之間的對能。
- (乙) $\text{---}\bullet\text{---}\circ\text{---} j_1 \Omega_1$
 $\sum_J (C_{j_1 a_1, j_1 \pm a_1}^{J \pm a_1})^2 F^J$,
 a 與 b 之間的對能。
- (丙) $\text{---}\circ\text{---} j_1 \Omega_1$
 $\text{---}\bullet\text{---} j_2 \Omega_2$ $\sum_J (C_{j_1 a_1, j_2 a_2}^{J a_1 + a_2})^2 F^J$
- (丁) $\text{---}\circ\text{---} j_1 \Omega_1 \text{---}\bullet\text{---}$
 或 $\text{---}\circ\text{---} j_2 \Omega_2 \text{---}\bullet\text{---}$ $2 \sum_J (C_{j_1 a_1, j_2 a_2}^{J a_1 + a_2})^2 F^J$.

這裏要注意兩點：第一，各個式子中 F^J 與兩個粒子的組態有關，具體數值見附錄一。其次累和的符號必如此體會，當考慮中的一對粒子是同類粒子的話，累和只須對獨態 (1S 波) 進行，又當考慮中的一對粒子是異類粒子的話，累和要對獨態和三態 (1S 和 3S 波) 同時進行。此外我們還可以注意到同類粒子公式比異類粒子之間的相應公式多一個因子 2，這個因子是由於反對稱化而來的。

通過上面這些標準情形的結果不難計算具體的原子核的對能了。

(一) O^{18} 的 6^2 態的對能

當形變 $\eta = 0$ 時：

$$W_{\eta=0(\text{對能})} = F^0 = -4 \text{ Mev};$$

當形變 $\eta \neq 0$ 時：

$$W_{(\text{對能})} = 2 \sum_J (C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{J 0})^2 F^J = 2 \left\{ \frac{1}{6} F^0 + \frac{4}{21} F^2 + \frac{1}{7} F^4 \right\} = -1.77 \text{ Mev},$$

$$\Delta W = -4 + 1.77 = -2.27 \text{ Mev}.$$

(二) O^{18} 的 5^2 態的對能

當形變 $\eta = 0$ 時：

$$W_{\eta=0(\text{對能})} = F^0 = -4 \text{ Mev};$$

當形變 $\eta \neq 0$ 時:

$$W_{\eta \neq 0(\text{對能})} = 2 \sum_J (C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^J)^2 F^J = -1.85 \text{ Mev},$$

$$\Delta W = -2.15 \text{ Mev}.$$

(三) O^{18} 的 6^3-4 態的對能

當 $\eta = 0$ 時:

(1) 6^3 之間的相互作用

應用

$$W_{6^3} = F^0 + 2 \frac{\sum (2J+1)F^J}{(2j+1)(2j_0+1)},$$

就得

$$W_{6^3} = -\left(0.45 + 2 \cdot \frac{0.45 + 5 \times 0.1 + 9 \times 0.04 + 3 \times 0.23 + 7 \times 0.13 + 11 \times 0.22}{6 \times 6}\right) =$$

$$= -0.74 \left(\text{單位: } + \frac{\mathcal{L}}{4\pi} \alpha^3\right) = -6.63 \text{ Mev};$$

(2) 4 (穴)與 6^3 之間的相互作用(這個相互作用的結果前面必須乘上一個負號)

$$2 \times \frac{\sum (2J+1)F^J}{6 \times 2} + 2F^1 =$$

$$= \frac{1}{6} \{7 \times .10 + 5 \times .18 + 7 \times .07\} + 2 \times .07 \left(\text{單位 } + \frac{\mathcal{L}}{4\pi} \alpha^3\right) =$$

$$= 4.39 \text{ Mev};$$

當 $\eta \neq 0$ 時:

(1) (6)號中子與(6)號中子作用等於 -1.77 Mev ;

(2) (6)號中子與(6)號質子的相互作用等於

$$\sum_J \{(C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^J)^2 F^J + (C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^J)^2 F^J\} = 3.56 \text{ Mev};$$

(3) (4)號穴與(6)號中子與質子之間的相互作用(異類粒子):

穴與質子的相互作用等於

$$\sum_J (C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^J)^2 F^J + (C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^J)^2 F^J = 3.1 \text{ Mev};$$

穴與中子的相互作用(同類粒子)等於

$$2 \frac{\{(C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^J)^2 F^J + (C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^J)^2 F^J\}}{2} = 0.73 \text{ Mev}.$$

$$\text{總的對能} = -1.77 - 3.56 + 3.1 + 0.73 = -1.5 \text{ Mev},$$

$$\Delta W = (-2.24 + 1.5) \text{ Mev} = -0.74 \text{ Mev}.$$

(四) F^{18} 的 (6^3) 組態的對能計算(計算本情形,很多上面的結果可以借用)

當 $\eta = 0$ 時:

(6)中子與(6)中子之間的對能等於 -4 Mev ;

一個(6)質子與兩個(6)中子之間的對能等於 -2.56 Mev ;

其和等於 -6.56 Mev 。

當 $\eta \neq 0$ 時：

兩個(6)中子之間的對能等於 -1.74 Mev ；

一個質子與兩個中子之間的對能等於 -3.56 Mev ；

其和等於 -5.30 Mev ，

$$\Delta W = -1.26 \text{ Mev}.$$

(五) F^{19} 的 (5^3) 組態的對能計算

當 $\eta = 0$ 時：

一對中子的對能 = -4 Mev ；

一對中子與一個質子的對能 = -2.56 Mev ，

總和等於 -6.56 Mev 。

當 $\eta \neq 0$ 時，

一對中子與一個質子的對能

$$= \sum_J (C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^J)^2 + (C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^J)^2 F^J = -3.77 \text{ Mev};$$

一對(5)是中子的對能 = -1.85 Mev ；

總和等於 -5.62 Mev ，

$$\Delta W = -0.94 \text{ Mev}.$$

(六) F^{19} 的 $6^2 + 7$ 組態的對能的計算

當 $\eta = 0$ 時：

中子的對能 = -4 Mev ；

質子與一對中子的對能 = -2.56 Mev ；

總和等於 -6.56 Mev 。

當 $\eta \neq 0$ 時：

一對中子的對能 = -1.74 Mev ；

一個質子與兩個中子的對能等於

$$\sum_J \{ (C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^J)^2 + (C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^J)^2 \} F^J = -3.2 \text{ Mev};$$

總和等於 -4.94 Mev ，

$$\Delta W = -1.62 \text{ Mev}.$$

從這些具體的例子的詳細計算可以看到，對某個給定的組態來說，在 $\eta = 0$ 的情形的對能和在 $\eta \neq 0$ 的情形的對能的差都在 1.5 Mev 左右。這個能量差不足以使 $\eta = 0$ 的那點成爲穩定點，也就是說對能固然有將穩定點的形變減小的趨勢，但尚不足以將變形態改變成球形態。

當次級殼層被填滿時，對能對核變形就更沒有什麼影響。這可以由下面的討論看出來，假設次級殼層的角動量是 j ，軌道的角動量是 l ，若有 $2j + 1$ 個核子填滿這個次級殼層時，那麼這 $2j + 1$ 個核子之間的相互作用就等於

$$I = -\frac{1}{2} \sum_{a_1 a_2} (2l + 1)^2 (2j + 1)^2 \sum_{J \text{ 偶}} (C_{J 0}^{l_0 l_0})^2 U^2 \begin{pmatrix} j & \frac{1}{2} & l \\ j & \frac{1}{2} & l \\ J & 0 & J \end{pmatrix} (C_{J a_1 + a_2}^{j a_1 j a_2})^2 I_{nl}, \quad (13)$$

式中

$$I_{nl} = \frac{\mathcal{L}}{8\pi} \int_0^R R_{ne}^A(r) r^2 dr \quad (R \text{ 是原子核的半徑}). \quad (14)$$

在(13)中令

$$A_J = (C_{J_0^0}^{l_0 t_0})^2 U^2 \begin{pmatrix} j & \frac{1}{2} & l \\ j & \frac{1}{2} & l \\ J & 0 & J \end{pmatrix},$$

當 $J = 0$ 時最大，一般講來 $A_J \propto \frac{1}{2J+1}$ ，因而若取 $A_0 \sim 1$ ，則 $A_2 \sim \frac{1}{5}$ ， $A_4 \sim \frac{1}{9}$ ，…。由此可知一對內稟量子數是 Q 和 $-Q$ 的粒子，因為它們的總角動量可以耦合成零，所以它們之間的互相作用最強。但是我們考慮對能時不能僅考慮量子數是 Q 和 $-Q$ 的粒子之間的對能，因為 $J \neq 0$ 時， A_3 雖較小，但當粒子數目增多時，合成 $J \neq 0$ 的幾率是很大的。因此 $Q_1 \neq -Q_2$ 時，它們之間的對能總和可能還是很大的。就是由於這個因素，所以當(13)式對 $Q_1 Q_2$ 和 J 求和時，

$$I = -\frac{2j+1}{2} (2j+1) I_{nl}, \quad (15)$$

這個結果是衆所熟知的。而如果忽略 $J \neq 0$ 的相互作用，則

$$I = -2 \sum_Q (C_{0_0}^{j_0 j_0 - Q})^2 (2j+1) I_{nl} = -(2j+1) I_{nl}.$$

由此可見，不同 Q 之間的相互作用是不能忽略的，而且當次滿殼層填滿時，無論原子核是否變形，對能總和都是一樣的，亦即對能對原子核變形就沒有什麼影響。

既然對能的影響較小，因此我們在下節中討論轉動微擾的影響。

四、轉動微擾

根據上節的討論，對能對於原子核變形的影響不大，現在再考慮轉動能對原子核變形的影響。通過簡單的計算，我們知道 O^{18} 的 (5^2) 組態的轉動能是 2.1 Mev， O^{18} 的 (6^2) 組態的轉動能是 2.4 Mev， F^{19} 的 (6^3) 組態是 2.7 Mev， F^{19} 的 (5^3) 組態是 2.96 Mev。從這個結果可以看出，轉動能的數值並不很小而且是隨着原子核離開滿殼層的程度而增加。這是因為若在滿殼層以外有粒子的話，那麼在形變的情形下，它們合成的總角動量 $J \neq 0$ ，因而就有轉動能；既然轉動能的值相當大，而且轉動能的值又和形變有關，因而就有必要在討論穩定變形時將轉動能也考慮進去。在上節中已經論及由尼爾森得出的形變值在某些情形(例如 O^{17} ， O^{18})比實驗值大得很多，而對能的影響又不足以解釋這種矛盾，下面的討論說明轉動微擾有使形變減小的趨勢。現在我們用 O^{17} 作為一個具體的例子來說明轉動微擾對於原子核穩定變形的影響。 O^{17} 的組態是在 8 個中子和 8 個質子的滿殼層外面帶上另外一個粒子，這個粒子的可能的最低能量組態是 $d_{\frac{5}{2}} (Q = \frac{1}{2})$ ， $d_{\frac{3}{2}} (Q = \frac{3}{2})$ 和 $d_{\frac{1}{2}} (Q = \frac{5}{2})$ 。當然在形變等於零的情形，粒子的角動量 j 是一個好的量子數，但在形變不等於零的情形 j 就不是一個好的量子數，換言之，組態的波函數是 j 和 j_3 各種本徵函數的疊加，而且

疊加的比例隨着形變不同而異。忽略核表面的振動，原子核的哈密頓函數有下列形式¹⁾：

$$H = H_P + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} \{I(I+1) + j(j+1) - 2Q^2\} - \frac{\hbar^2}{\mathcal{J}} (I_3 j_3 + I_2 j_2).$$

這裏的 H_P 是單粒子的哈密頓函數，第二、三兩項是轉動能，我們將轉動能分成兩項寫是因為第二部分對於 j_3 是對角形的，第三項則對於 j_3 來說是非對角形的，但在 $j_3 = k = Q = \frac{1}{2}$ 的情形 (k 和 Q 分別是總角量 I 和 j 在對稱軸方

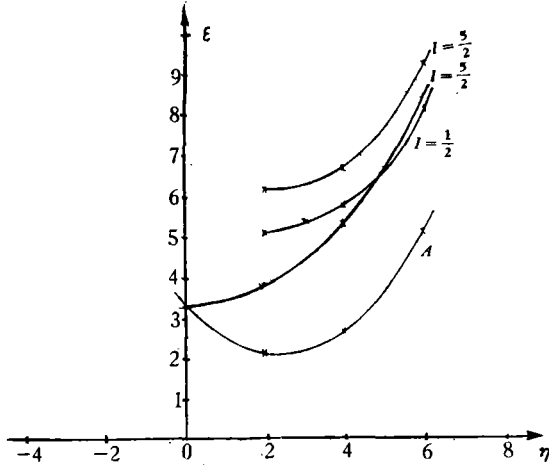


圖 14. 轉動微擾對平衡形變的影響
縱坐標表示由轉動微擾算出的能量。單位是 $\hbar^2/\mathcal{J} = 0.45 \text{ Mev}$ ，橫坐標是形變參數 η (假設 \mathcal{J} 與形變無關)，A 綫不考慮轉動能

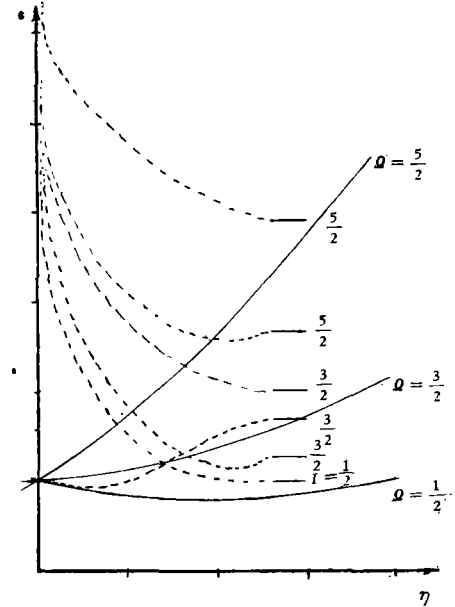


圖 15. 示意圖。當形變 η 趨於零時，轉動能量 \mathcal{J} 也趨於零。許多能級都趨於無限大，其中只有一條 $I = \frac{1}{2}$ 的能級回到球形場下的能量。 $Q = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ 這三條綫不考慮轉動能

向的投影的 I_3 和 j_3 算符的本徵值)，它對於對角綫上的項也有貢獻，這是和原子核的波函數的對稱性有關的。既然在不同的變形的場合，同一個組態內所包含的不同的 j 和 j_3 的成分比重不同了，因此計算出來的 H 的本徵值也有所不同。

上面寫着的哈密頓算符中的第三項要將各種不同的 j_3 的本徵函數混合起來，於是在各種不同變形的情形，這種效果是不同的。在計算 H 的本徵值和本徵函數時需要解一個久期方程式。在我們所選擇的 O^{17} 的例子，我們根據尼爾森所給的波函數，計算了 $\eta = 2, 4, 6$ 三個不同變形的情形的 H 的本徵值，並且也詳細地研究了 $\eta = 0$ (球形) 時的情況。我們假設只有 (5), (6), (7) 三個組態混合，忽略其他組態的混合，這樣久期方程式是一個三行三列的行列式，所以有三個根，這樣做在大形變情況下當然並不完全正確，不過在形變比較小的情況下，因為 j 是一個好量子數，其他組態的混合是不重要的。將考慮了轉動的影響的結果與不考慮轉動的影響的結果比較一下就會發現，由於轉動的影響，穩定點的變形的值減小得多了。詳細的計算放在附錄二中，現在將計算的結果列成表 2。我們又將表中的結果畫成曲綫如圖 14 所示。由於考慮了轉動的影響，和穩定點相當的形變

1) 在形變大小和零點振動差不多的情況下 (O^{17} 就是這樣的一個原子核)，忽略核表面的振動而單獨考慮核轉動是沒有根據的，因為在這時轉動慣量很小，轉動能量很大。根據 Bohr 的綜合模型，只考慮轉動不考慮振動等於只考慮一部分擊子譜而忽略另一部分擊子譜。在形變小的情況下，這部分擊子譜甚至是激發能相當高的一部分，當然這是沒有什麼根據的。所以以下的討論在形變小的情況下只可以看做是一種模型，用來說明某些觀念。

表 2. 轉動微擾對能級的影響 (單位: $\frac{\hbar^2}{\mathcal{I}} = 0.45 \text{ Mev}$)

| | | $\eta=0$ | $\eta=2$ | $\eta=4$ | $\eta=6$ |
|-------|-------|----------|----------|----------|----------|
| 最小本徵值 | 考慮轉動 | -2.66 | -2.19 | -0.66 | 2.34 |
| | 不考慮轉動 | -2.66 | -3.8 | -1.95 | 0.315 |
| 次小本徵值 | 考慮轉動 | 很 大 | 2.14 | 5.74 | 12.01 |
| | 不考慮轉動 | -2.66 | -3.37 | 0.89 | 5.586 |
| 最大本徵值 | 考慮轉動 | 很 大 | 7.61 | 10.96 | 17.21 |
| | 不考慮轉動 | -2.66 | -0.8 | 6.05 | 13.26 |

大為減小，這個結論也是可以理解的，當原子核圍繞着和它的對稱軸垂直的軸綫轉動時（在對稱變形的情形都是這樣的），由於離心力，原子核要增加向對稱軸方向的形變，但同時要將核裏的粒子用離對稱軸，也就是使 Ω (j_3 的本徵值) 不再為好的量子數，這個效應是要使核的軸向伸長減小的。在這兩種相反的趨勢中，如果後者佔優勢，轉動微擾就要將形變減小。這個結論也可以說明有關 O^{17} 的變形的實驗結果和尼爾森的理論的差別。從實驗中定出的四極矩的值比起從尼爾森曲綫定出的形變的值再計算出來的值至少小四倍，但考慮了轉動微擾之後就發現這個變形減小得很多，這樣就有可能使理論和實驗相符合。

五、結 束 語

有些作者分析研究輕原子核的能級的數據，發現其中有很多的核的能級具有轉動能級的性質，而核的轉動又是和核的變形分不開的，於是我們首先根據尼爾森的模型對輕原子核的變形規律進行了系統的和研究。但是尼爾森的模型沒有考慮原子核內部的各個粒子之間的對能，以及轉動對於形變的影響。我們也考慮了這兩種因素。首先我們發現對能在決定核的形變的大小過程中所起的作用是有限的，並不是在滿殼層外的核子數目愈多，對能的效果會隨之成正比例地增大。其基本原因在於當形變等於零時，對能矩陣元 F^0 雖然較大，但在形變不等於零時，可能成對的數目增加得很多，所以雖然一般說來 F^J ($J > 0$) 比較小些，但總的效果與在變形等於零的地點小不了多少，也就是對能對於核的能量曲綫的各段的影響差不多，因此常常不能改變不考慮對能的討論所得到的結論。所以單考慮對能不能解釋某些場合理論和實驗對於核的變形的大的估計的差別。但是我們發現：當考慮轉動對於形變的影響之後，理論的結果在一些情況下大為改善，和穩定位置相應的形變減小了，這樣就使得理論和實驗有可能得到更好的符合。

附 錄 一

計算對能時要用到的幾個積分的值。

在計算對能時，曾用到下列兩式：

$$F_1(j_1 j_2 J) \equiv -\frac{\mathcal{I}}{4\pi} \int R_{n_1}^2 R_{n_2}^2 r^2 dr \times \\ \times (2l_1 + 1)(2l_2 + 1)(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(C_{j_0}^{l_1, l_2, 0})^2 U^2 \begin{pmatrix} j_1 & \frac{1}{2} & l_1 \\ j_2 & \frac{1}{2} & l_2 \\ J & 0 & J \end{pmatrix}$$

和

$$F_3(j_1 j_2 J) \equiv -\frac{\mathcal{J}}{4\pi} \int R_{n_1 l_1}^2 R_{n_2 l_2}^2 r^2 dr \times \left[3(2l_1+1)(2l_2+1)(2j_1+1)(2j_2+1) \sum_L (C_{L0}^{l_1 0, l_2 0})^2 U^2 \begin{pmatrix} j_1 & \frac{1}{2} & l_1 \\ j_2 & \frac{1}{2} & l_2 \\ J & 1 & L \end{pmatrix} \right]$$

這裏的 R_{nl} 是諧振子波函數的徑向部分。

現在將這兩個式子相應於各種不同的 l_1, l_2, j_1, j_2 和 J 時的數值列於下面的表中。這裏的單位是 $-\frac{\mathcal{J}}{4\pi} a^3 = -8.9 \text{ Mev}$ 。在表中的 $F_3(j_1 j_2 J)$ 或 $F_1(j_1 j_2 J)$ 下的值寫成兩個因子的乘積，第一個因子是有關 r 的積分，第二個因子是和角度有關的部分。

| l_1, l_2, j_1, j_2, J | $F_3(j_1 j_2 J)$ | l_1, l_2, j_1, j_2, J | $F_3(j_1 j_2 J)$ | l_1, l_2, j_1, j_2, J | $F_3(j_1 j_2 J)$ |
|-------------------------------|--------------------------|---|---------------------------|---|----------------------------|
| $d_{\frac{5}{2}}^2 \quad J=1$ | $0.15 \times 15 = 0.23$ | $d_{\frac{5}{2}} d_{\frac{3}{2}} \quad J=1$ | $0.15 \times 2 = 0.30$ | $d_{\frac{5}{2}} s_{\frac{1}{2}} \quad J=3$ | $0.09 \times 1 = 0.09$ |
| $d_{\frac{3}{2}}^2 \quad J=3$ | $0.15 \times .9 = 0.13$ | $d_{\frac{5}{2}} d_{\frac{3}{2}} \quad J=2$ | $0.15 \times 0.7 = 0.10$ | $d_{\frac{3}{2}} p_{\frac{1}{2}} \quad J=1$ | $0.18 \times 0.33 = 0.06$ |
| $d_{\frac{5}{2}}^2 \quad J=5$ | $0.15 \times 1.4 = 0.22$ | $d_{\frac{5}{2}} d_{\frac{3}{2}} \quad J=3$ | $0.15 \times 0.37 = 0.06$ | $d_{\frac{3}{2}} p_{\frac{1}{2}} \quad J=2$ | $0.18 \times 1 = 0.18$ |
| $d_{\frac{3}{2}}^2 \quad J=1$ | $0.15 \times 1.2 = 0.18$ | $d_{\frac{5}{2}} d_{\frac{3}{2}} \quad J=4$ | $0.15 \times 1.66 = 0.25$ | $d_{\frac{3}{2}} s_{\frac{1}{2}} \quad J=4$ | $0.09 \times 1 = 0.09$ |
| $d_{\frac{5}{2}}^2 \quad J=3$ | $0.15 \times 1.2 = 0.18$ | $d_{\frac{5}{2}} p_{\frac{1}{2}} \quad J=2$ | $0.18 \times 1 = 0.18$ | $d_{\frac{3}{2}} s_{\frac{1}{2}} \quad J=2$ | $0.09 \times 0.6 = 0.054$ |
| $p_{\frac{1}{2}}^2 \quad J=1$ | $0.33 \times 1 = 0.33$ | $d_{\frac{5}{2}} p_{\frac{1}{2}} \quad J=3$ | $0.18 \times 0.57 = 0.10$ | $P_{\frac{1}{2}} s_{\frac{1}{2}} \quad J=0$ | $0.23 \times 1 = 0.23$ |
| $s_{\frac{1}{2}}^2 \quad J=1$ | $0.52 \times 1 = 0.52$ | $d_{\frac{5}{2}} s_{\frac{1}{2}} \quad J=2$ | $0.09 \times 0.4 = 0.036$ | $P_{\frac{1}{2}} s_{\frac{3}{2}} \quad J=1$ | $0.23 \times 0.33 = 0.076$ |

| $l_1 l_2 j_1 j_2 J$ | $F_1(j_1 j_2 J)$ | $l_1 l_2 j_1 j_2 J$ | $F_1(j_1 j_2 J)$ | $l_1 l_2 j_1 j_2 J$ | $F_1(j_1 j_2 J)$ |
|-------------------------------|---------------------------|---|--------------------------------|---|---------------------------|
| $d_{\frac{5}{2}}^2 \quad J=0$ | $0.15 \times 3 = 0.45$ | $p_{\frac{1}{2}}^2 \quad J=0$ | $0.33 \times 1 = 0.33$ | $d_{\frac{5}{2}} s_{\frac{1}{2}} \quad J=2$ | $0.09 \times 0.13 = 0.01$ |
| $d_{\frac{3}{2}}^2 \quad J=2$ | $0.15 \times 0.69 = 0.10$ | $s_{\frac{1}{2}}^2 \quad J=1$ | $0.52 \times 1 = 0.52$ | $d_{\frac{3}{2}} p_{\frac{1}{2}} \quad J=1$ | $0.18 \times 0.67 = 0.12$ |
| $d_{\frac{5}{2}}^2 \quad J=4$ | $0.15 \times 0.29 = 0.04$ | $d_{\frac{5}{2}} d_{\frac{3}{2}} \quad J=2$ | $0.15 \times 0.17 \times 0.02$ | $d_{\frac{3}{2}} s_{\frac{1}{2}} \quad J=2$ | $0.09 \times 0.2 = 0.02$ |
| $d_{\frac{3}{2}}^2 \quad J=0$ | $0.15 \times 2 = 0.30$ | $d_{\frac{5}{2}} d_{\frac{3}{2}} \quad J=4$ | $0.15 \times 0.57 = 0.08$ | $p_{\frac{1}{2}} s_{\frac{1}{2}} \quad J=1$ | $0.23 \times 0.33 = 0.07$ |
| $d_{\frac{5}{2}}^2 \quad J=2$ | $0.15 \times 0.4 = 0.06$ | $d_{\frac{5}{2}} p_{\frac{1}{2}} \quad J=3$ | $0.18 \times 0.43 = 0.07$ | | |

附 錄 二

O^{17} 的轉動微擾

爲了求出

$$H = H_P + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} (I(I+1) + j(j+1) - 2\Omega^2) + \frac{\hbar^2}{\mathcal{J}} (I_1 j_1 + I_2 j_2)$$

的本徵值，必須解一個久期方程。現在 O^{17} 的三個最低能量的組態是滿殼層分別加上一個組態爲 $(\Omega = \frac{5}{2}^+)$, $(\Omega = \frac{3}{2}^+)$, $(\Omega = \frac{1}{2}^+)$ 的粒子，這些組態分別和尼爾森曲綫中的第(5), (6), (7)相應。所以我們分別用 $\Psi(5)$, $\Psi(6)$, $\Psi(7)$ 來表示它們的波函數。尼爾森將它們表成了以 N, l, Λ, Σ 爲好的量子數的波函數 $|N l \Lambda \Sigma\rangle$ 的綫性疊加。但是爲了要計算 H ，我們最好將它變換成以 N, l, j, Ω 爲好的量子數的波函數 $|N l j \Omega\rangle$ 的綫性疊加，因爲

在 H 中出現的算符有 j 和 j_1, j_2, j_3 . 先討論 $\eta = 2$ 的情形:

$$\Psi(5) = |222\uparrow\rangle = |22\frac{5}{2}\frac{5}{2}\rangle,$$

$$\begin{aligned}\Psi(6) &= \frac{1}{1.27} \{ |220\uparrow\rangle + 0.503 |200\uparrow\rangle + 0.6 |221\downarrow\rangle \} = \\ &= 0.91 |22\frac{5}{2}\frac{1}{2}\rangle - 0.131 |22\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle + 0.397 |20\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(7) &= \frac{1}{1.06} \{ |221\uparrow\rangle + 0.351 |222\downarrow\rangle \} = \\ &= 0.99 |22\frac{5}{2}\frac{3}{2}\rangle - 0.125 |22\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle.\end{aligned}$$

根據這些波函數就容易求出 H 的久期方程. 在計算的過程中, 我們可以將粒子的哈密頓算子 H_P 當作 $\sum_i \left(N_i + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{\epsilon^2}{9} \right) + \sum_i kr_i(\epsilon)$, 並且在計算中可以先不考慮 $\sum_i \left(N_i + \frac{3}{2} \right) \frac{\epsilon^2}{9}$ 而在最後求得的結果上加上這個數值即可. 這樣求出的久期方程

$$\begin{vmatrix} (5|H|5) - \epsilon & (5|H|6) & (5|H|7) \\ (6|H|5) & (6|H|6) - \epsilon & (6|H|7) \\ (7|H|5) & (7|H|6) & (7|H|7) - \epsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.615 - \epsilon & 0 & -2.47 \\ 0 & -1.053 - \epsilon & -3.64 \\ -2.47 & -3.64 & 3.28 - \epsilon \end{vmatrix} = 0$$

從這個久期方程解出的三個根是

$$\epsilon = -3.39, \quad 0.94, \quad 6.41,$$

在這三個根上都加上 $\sum \left(N + \frac{3}{2} \right) \frac{\epsilon^2}{9} = 1.2$ 就得到粒子運動和轉動合在一起的能量的三個值:

$$-2.19, \quad 2.14, \quad 7.61 \quad \text{單位是 } \frac{\hbar^2}{\mathcal{J}} = 0.45 \text{ Mev.}$$

這就是表 2 中第四列中所記載的數字. 再考慮 $\eta = 4$ 的情形. 我們將 $\Psi(5), \Psi(6), \Psi(7)$ 表成 $|NljQ\rangle$ 的綫性疊加, 就得到

$$\Psi(5) = |22\frac{5}{2}\frac{5}{2}\rangle,$$

$$\Psi(6) = 0.498 |20\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + 0.836 |22\frac{5}{2}\frac{1}{2}\rangle - 0.24 |22\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle,$$

$$\Psi(7) = 0.98 |22\frac{5}{2}\frac{3}{2}\rangle - 0.203 |22\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle.$$

由這些波函數得到的久期方程是

$$\begin{vmatrix} 3.386 - \epsilon & 0 & -2.45 \\ 0 & -4.01 - \epsilon & -3.39 \\ -2.45 & -3.39 & 2.57 - \epsilon \end{vmatrix} = 0.$$

從這個久期方程解出的三個根是: $-5.36, 1.04$ 和 6.26 , 再加上 $\sum \left(N + \frac{3}{2} \right) \frac{\epsilon^2}{9}$, 就得到粒子運動和轉動合在一起的能量 $-0.66, 5.74, 10.96$, 這就是表 2 中第五列所記載的數字. 再考慮 $\eta = 6$ 的情形. 將 $\Psi(5), \Psi(6), \Psi(7)$ 表成 $|NljQ\rangle$ 的綫性疊加, 就得到

$$\Psi(5) = |22\frac{5}{2}\frac{5}{2}\rangle,$$

$$\Psi(6) = 0.534 |20\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + 0.79 |22\frac{5}{2}\frac{1}{2}\rangle - 0.307 |22\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle,$$

$$\Psi(7) = 0.97 |22\frac{5}{2}\frac{3}{2}\rangle - 0.252 |22\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle.$$

1) 這裏 $\hbar\omega \approx 16 \text{ Mev}$, 並且我們取 $\frac{\hbar^2}{\mathcal{J}} = 0.45 \text{ Mev}$ 為單位.

由這些波函數得到的久期方程是

$$\begin{vmatrix} 5.16 - \epsilon & 0 & -2.42 \\ 0 & -7.2 - \epsilon & -3.25 \\ -2.42 & -3.25 & 1.8 - \epsilon \end{vmatrix} = 0.$$

由此可解出的三個根是 $-11.4, -4.55, 2.66$ 。再加上 $\sum \left(N + \frac{3}{2}\right) \frac{\epsilon^2}{9} = 10.6$ ，就得到粒子和轉動合成在一起的能量 $-0.8, 6.05, 13.26$ ，單位是 $\frac{\hbar^2}{\mathcal{I}} = 0.45 \text{ Mev}^{1)}$ 。表中所列不考慮轉動的能量就是 $\frac{3\hbar\omega}{4} \left\{ \sum \left(N + \frac{3}{2}\right) \frac{\epsilon^2}{9} + kr(\epsilon) \right\}$ 的值(單位也是 0.45 Mev)。

最後讓我們討論 $\eta = 0$ 的情形(球形核)：我們的討論限於核的形狀是固定的，即沒有振動的情形(見第四節註)。核的哈密頓算符的粒子部分和轉動部分是(H_P 在此情形是一個常數，可以忽略)。

$$H_P + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} \{I(I+1) - \kappa^2 - \mathcal{Q}^2 + DJ(J+1)\} - \frac{\hbar^2}{\mathcal{I}} (I_1j_1 + I_2j_2).$$

轉動慣量 \mathcal{I} 隨着形變的減小而變小，當 $\eta \rightarrow 0$ 時 \mathcal{I} 也 $\rightarrow 0$ ，因而 $\frac{1}{\mathcal{I}}$ 變得很大。首先討論 $I < j$ 的情形，例如 $I = \frac{1}{2}$ 的情形，此時本徵函數沒有組態混合，本徵值不等於零，因為當 $\eta \rightarrow 0$ 時 $\frac{1}{\mathcal{I}}$ 變得很大，於是總的能量也就很大(見圖 15)。又例如 $I = \frac{3}{2}$ 時，雖有一些組態混合，但解久期方程所得到的本徵值都不等於零。因此，當 $\eta \rightarrow 0$ 時，這些能級也是很高的。

總之在 $\eta \rightarrow 0$ 的情形，當 $I < j$ 時的轉動能級都很高，也就是說這些能級都不能被激發，但當 $I = j$ 時存在着一個零解。在 $I = j$ 時久期方程的形狀成爲

$$\begin{vmatrix} j(j+1) - \frac{1}{4} - \frac{(j+\frac{1}{2})^2}{2} - \epsilon & -\frac{1}{2}(j - \frac{1}{2})(j + \frac{3}{2}) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(j - \frac{1}{2})(j + \frac{3}{2}) & j(j+1) - \frac{9}{4} - \epsilon & -\frac{1}{2}(j - \frac{3}{2})(j + \frac{5}{2}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(j - \frac{3}{2})(j + \frac{5}{2}) & j(j+1) - \frac{25}{4} - \epsilon & -\frac{1}{2}(j - \frac{5}{2})(j + \frac{7}{2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(j - k + 1)(j + k) & j(j+1) - \frac{k^2}{4} - \epsilon & -\frac{1}{2}(j - k)(j + k + 1) \end{vmatrix} = 0.$$

這個久期方程有一個等於 0 的解，和這個等於零的解相應的本徵矢量的一切分量都是 1，也就是說取下面的形狀，

1) 這裏爲方便起見，取 $\frac{\hbar^2}{\mathcal{I}}$ 爲常數，不隨 η 而變。我們也可以取 $\frac{\hbar^2}{\mathcal{I}}$ 隨着 η 的減小而增加，即使這樣，圖 14 中的大致趨勢仍是正確的。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

這個結論只要注意到前面那個久期方程的行列式中的每一行的和都等於零，這點就不難得出。由於轉動的算符 $\frac{\hbar^2}{2I} (I - j)^2$ 只能取正或零值，因此這個值和最小的轉動能相當。又從上面的本徵矢量不難得到，這個轉動能等於零的態的波函數是

$$\Psi = \sum_{a=-j}^j (\Psi_a(r) D_{M_a}^j + \Psi_{-a}(r) D_{M-a}^j) = \Psi_m^j(r).$$

事實上這個波函數是一個在靜止坐標系中的粒子的波函數，既然波函數只有粒子的部分（轉動部分等於常數），因此很明顯的，轉動能等於零了。關於其他的轉動能級都很高，因此不能激發。

參 考 文 獻

- [1] Litherland, A. E., Paul, E. B., Bartholomew, G. A. and Gove, H. E., *Phys. Rev.* **102** (1956), 208. Пекер, Л. К., Гусова, Л. В., Чубинский, О. В., *Изв. АН СССР, сер. физич.* **21** (1957), 2013.
- [2] Nilsson, S. G., *Dan. Mat. Fys. Medd.* **29** (1955), No. 16.
- [3] Rakavy, G., *Nuclear Physics* **4** (1957), 375.
- [4] Бирбраир, Б. Л., *ЖЭТФ* **33** (1957), 1235.

ДЕФОРМАЦИЯ ЛЕГКИХ ЯДЕР

Юй Мин Дэн Цзя-сянь Цжоу Сяо-чэн Ли Ян-го

(Академия наук Китая)

Резюме

В настоящее время после анализа энергетического спектра легких ядер обнаружили, что некоторые ядра обладают вращательными энергетическими уровнями. В данной работе, исходя из теории обобщенной модели рассматривается связь основных и возбужденных состояний легких ядер с деформацией. В рассуждении учли влияние парных энергий и вращательных возмущений. В результате оказалось, что влияние вращательных возмущений на деформацию довольно велико, причем в некоторых случаях изменило порядок энергетических уровней.